



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS
FACULTAD DE CIENCIAS

“SOBRE LA ESTRUCTURA TOPOLÓGICA DEL ESPACIO $C_n(X)/C_n(K, X)$ ”

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:
Doctor en Ciencias (Matemáticas)

PRESENTA:

M. en C. JOSÉ ANTONIO MARTÍNEZ CORTEZ



UAEM

TUTORES ACADÉMICOS:
Dr. ENRIQUE CASTAÑEDA ALVARADO
Dr. JOSÉ GUADALUPE ANAYA ORTEGA
TUTOR ADJUNTO:
Dr. NORBERTO ORDOÑEZ RAMIREZ

TOLUCA, MÉXICO

DICIEMBRE 2019

A mis padres, Mario Antonio y Leticia.
A mi hermana María Guadalupe,
A mi sobrina Allison Marian,
A mi cuñado Rodrigo.
A mis abuelos.

Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el universo.

Galileo Galilei

Agradecimientos

Quiero agradecer principalmente a Dios por la vida, a mis padres por el apoyo otorgado para cumplir otra más de mis metas, por la paciencia que me tuvieron al emprender los estudios de doctorado.

Le agradezco al Dr. Enrique Castañeda Alvarado la confianza y paciencia, pero sobre todo su apoyo en la orientación para llevar a buen fin esta tesis. A los doctores José Guadalupe Anaya Ortega y Norberto Ordoñez Ramirez les agradezco el tiempo y apoyo brindado. A los revisores de esta tesis, agradezco su apoyo, sus consejos, observaciones y orientaciones.

Agradezco el apoyo otorgado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), ya que sin ello difícilmente hubiera podido realizar mis estudios de posgrado.

Por último, agradezco a todos aquellos que con sus comentarios, me animaron a seguir trabajando, a esforzarme y dar lo mejor de mi para culminar este trabajo.

Índice general

Resumen	1
Introducción	3
Antecedentes	6
Objetivos	8
Métodos	10
1. Preliminares	11
1.1. Continuos e Hiperespacios	11
1.2. El hiperespacio $C_n(X)/C_{n_K}(X)$	20
2. Propiedades Topológicas del espacio $C_K^n(X)$	23
2.1. Conexidad	23
2.2. Arco desconexidad	25
2.3. Celdas en el hiperespacio $C_K^n(X)$	29
2.4. Contractibilidad	29
2.5. Unicoherencia y Homogeneidad	34
2.6. Aposíndesis	35
2.7. Gráficas Finitas	39
3. Funciones Inducidas	47
3.1. Resultados Generales	47
3.2. Clases de Funciones	55
Resultados	67

Discusión	69
Conclusiones	70
Anexos	75

Resumen

El n -ésimo hiperespacio de un continuo X es la familia, $C_n(X)$, de subconjuntos cerrados y no vacíos de X con a lo más n componentes, dotado con la topología inducida por la métrica de Hausdorff. Dado K un subconjunto cerrado del continuo X , la subfamilia $C_{n_K}(X)$ de $C_n(X)$ que consta de todos los elementos de $C_n(X)$ que contienen a K , es otro hiperespacio de X . Con estos dos hiperespacios se define el espacio cociente $C_n(X)/C_{n_K}(X)$. Este trabajo presenta propiedades topológicas de este espacio topológico y las relaciones que hay entre las propiedades que presenta el continuo X , el hiperespacio $C_n(X)$ y el espacio cociente $C_n(X)/C_{n_K}(X)$. Además, se presenta la relación de funciones entre continuos $f : X \rightarrow Y$ y sus funciones inducidas $C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ y $C_{n_K}^n(f) : C_{n_K}^n(X) \rightarrow C_{f(K)}^n(Y)$, para las clases de funciones: casi monótonas, atriódicas, confluentes, unión, ligeras, monótonas, abiertas, OM, pseudo-confluentes, quasi-monótonas, semiconfluentes, fuertemente libremente descomponibles, débilmente confluentes y débilmente monótonas.

Abstract

The n -fold hyperspace of X is the family, $C_n(X)$, of closed and non-empty subsets of X with at most n components, endowed with the topology induced by Hausdorff's metric. Given K a closed subset of the continuum X , the subfamily $C_{n_K}(X)$ of $C_n(X)$ consisting of all the elements of $C_n(X)$ that contain K , is another hyperspace of X . With these two hyperspaces the quotient space $C_n(X)/C_{n_K}(X)$ is defined. This work presents topological properties of this topological space and the relationships between the properties that the continuum X , the hyperspace $C_n(X)$ and the quotient space $C_n(X)/C_{n_K}(X)$, present.

In addition, the relationship of functions between continua, $f : X \rightarrow Y$ and their induced functions, $C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ and $C_K^n(f) : C_K^n(X) \rightarrow C_{f(K)}^n(Y)$, is presented for the functions: almost monotone, atriodic, confluent, union, light, monotone, open, OM, pseudo-confluent, quasi-monotone, semiconfluent, strongly freely decomposable, weakly confluent and weakly monotone.

Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Dado un continuo X , un *subcontinuo* de X es un subconjunto de X el cual es un continuo. Dado $n \in \mathbb{N}$, consideramos los siguientes hiperespacios de X :

- $2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$;
- $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$;
- $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$;
- $C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$.

Todos dotados con la métrica de Hausdorff (ver la definición en el Capítulo 1), nótese que $C(X)$ es igual a $C_1(X)$. Sea K un subconjunto cerrado de X , dado un hiperespacio $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, F_n(X), C_n(X)\}$, el conjunto

$$\mathcal{H}_K(X) = \{A \in \mathcal{H}(X) : K \subset A\}$$

es llamado el *hiperespacio contención para K en $\mathcal{H}(X)$* , considerado como subespacio de $\mathcal{H}(X)$.

Consideremos el espacio cociente

$$\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}_K(X)$$

con la topología cociente. Por [37, Teorema 3.10, p. 40], $\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}_K(X)$ es un continuo. π_K^X denota la función cociente $\pi_K^X : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)/\mathcal{H}_K(X)$, y $\mathcal{H}_K^X = \pi_K^X(\mathcal{H}_K(X))$.

Por otro lado, dada una función continua entre continuos $f : X \rightarrow Y$, induce una función natural $f^* : 2^X \rightarrow 2^Y$ definida por $f^*(A) = f(A)$ para todo $A \in 2^X$. Así, para cada $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, F_n(X), C_n(X)\}$ la *función inducida* $\mathcal{H}(f) : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(Y)$ es la función $f^*|_{\mathcal{H}(X)}$. En el mismo sentido

se define la función inducida \tilde{f} entre los espacios cociente $\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}_K(X)$ y $\mathcal{H}(Y)/\mathcal{H}_K(Y)$, véase Capítulo 3.

Esta tesis aborda algunas propiedades topológicas del espacio cociente $\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}_K(X)$, además de mostrar las relaciones que hay de las funciones entre continuos f y las inducidas $\mathcal{H}(f)$ y \tilde{f} , cuando $\mathcal{H}(X) = C_n(X)$. Por lo mismo, está dividida en tres capítulos. El Capítulo 1 trata de los conceptos básicos como son: continuos, topología cociente, hiperespacios, topología de Vietoris, métrica de Hausdorff, arcos ordenados, funciones de Whitney, funciones inducidas, al final del capítulo introducimos nuestro objeto de estudio que es el hiperespacio cociente $C_K^n(X) = C_n(X)/C_{n_K}(X)$.

En el Capítulo 2, estudiamos las propiedades topológicas del espacio $C_K^n(X)$ tales como: conexidad local, arco desconexidad, contractibilidad, uncoherencia, homogeneidad, y aposindesis. El capítulo esta dividido en siete secciones. En la Sección 1, estudiamos la conexidad y la conexidad local del hiperespacio $C_K^n(X)$. En la Sección 2 desarrollamos resultados de arco desconexidad de $C_K^n(X) - \{C_{n_K}\}$. En la siguiente sección probamos cuando $C_K^n(X)$ contiene n -celdas. Continuando en la Sección 4 con el estudio de la no contractibilidad del espacio $C_K^n(X)$ con ayuda de los R^i -conjuntos. De manera breve, la Sección 5, contiene propiedades de uncoherencia y homogeneidad. La Sección 6, esta dedicada a la propiedad de aposindesis, damos condiciones para K bajo las cuales el espacio $C_K^n(X)$ es aposindético y finitamente aposindético. Finalmente en la Sección 7, mostramos resultados que se obtuvieron para la clase de gráficas finitas como la dimensión del espacio $C_K^n(X)$ y la relación que este tiene con conos, suspensiones y el espacio $C_n(X)$.

En el Capítulo 3, abordamos el siguiente problema. Dada \mathbb{M} una clase de funciones entre continuos, se determinaron relaciones entre las siguientes:

- (1) $f \in \mathbb{M}$;
- (2) $C_n(f) \in \mathbb{M}$;
- (3) $C_K^n(f) \in \mathbb{M}$ para cada $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f) \in \mathbb{M}$ para algún $K \in 2^X$,

donde $C_K^n(f)$ denota la función inducida entre los hiperespacios $C_K^n(X)$ y $C_{f(K)}^n(Y)$. El contenido de este capítulo, esta dividido en dos partes; la primera contiene definiciones básicas de funciones y resultados generales de funciones inducidas entre espacios cociente. La segunda parte presenta las rela-

ciones antes mencionadas de las siguientes clases de funciones: casi monótonas, atriódicas, confluentes, unión, ligeras, monótonas, abiertas, OM, pseudo-confluentes, quasi-monótonas, semi-confluentes, fuertemente libremente descomponibles, débilmente confluentes y débilmente monótonas.

Antecedentes

La Teoría de Continuos es una rama de la Topología que se encarga de estudiar las propiedades de los espacios métricos, compactos y conexos; a un espacio con dichas características se le llama continuo. Dado un continuo X con más de un punto. Un hiperespacio de X es una colección de subconjuntos de X que satisfacen propiedades específicas. Los primeros hiperespacios más estudiados de un continuo son:

$$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y cerrado}\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Al conjunto 2^X lo consideramos con la métrica de Hausdorff ([24]). Obsérvese que $C(X)$, $C_n(X)$ y $F_n(X)$ están contenidos en 2^X . De lo cual, podemos considerar a cada uno de ellos con la métrica heredada de 2^X .

Otros espacios topológicos se han definido mediante el cociente entre hiperespacios y han sido estudiados, algunos de ellos se mencionan a continuación. En 1979, Sam B. Nadler, Jr. en [36] define y denota el *hiperespacio suspensión* del continuo X como el espacio cociente

$$HS(X) = C(X)/F_1(X).$$

Más tarde, en 2004, R. Escobedo, M. de J. López y S. Macías extendieron el estudio del hiperespacio suspensión en [18].

En el mismo año, S. Macías generalizó el estudio del hiperespacio suspensión, considerando el espacio cociente

$$HS_n(X) = C_n(X)/F_n(X),$$

llamado el *n-ésimo hiperespacio suspensión* de X en [31], continuando su estudio en 2006, véase [33].

En el año 2008, J. C. Macías en [27] analizó el espacio cociente

$$PHS_n(X) = C_n(X)/F_1(X),$$

llamado el *n-ésimo pseudo-hiperespacio suspensión* de X .

El trabajo más reciente es del año 2016, J. Camargo y S. Macías en [10] consideraron el espacio cociente

$$C_1^m(X) = C_n(X)/C_1(X).$$

Por otro lado, dado K un subconjunto compacto de un continuo X y un hiperespacio $H(X) \in \{2^X, C(X), C_n(X), F_n(X)\}$, definimos

$$H_K(X) = \{A \in H(X) : K \subset A\}.$$

Así, continuando la línea de investigación de cocientes entre $C_n(X)$ y algún otro hiperespacio, se definen los espacios cociente $C_n(X)/C_{n_K}(X)$. Los cuales despiertan un interés particular con respecto a sus propiedades topológicas. Con respecto a funciones inducidas este hiperespacio abre un campo de trabajo, además de que ya hay diversas investigaciones sobre funciones inducidas entre hiperespacios cociente, véase [1], [4] y [25].

Hipótesis y Objetivos

Para este trabajo de investigación las hipótesis planteadas son las siguientes:

- Las diversas propiedades topológicas del continuo X las tiene el hiperespacio $C_K^n(X)$.
- Las diferentes clases de funciones entre continuos, se preservan al considerar las funciones inducidas entre sus hiperespacios cociente.

Los objetivos generales son:

- (1) Estudiar propiedades topológicas del espacio cociente $C_n(X)/C_n(K, X)$, así como las propiedades que son heredadas por el continuo X , y viceversa.
- (2) Estudiar clases de funciones entre continuos y sus relaciones con las funciones inducidas entre hiperespacios.

De manera más específica, para el primer objetivo, abordaremos las propiedades de conexidad local, arco desconexidad, contractibilidad, unicoherencia, homogeneidad y aposíndesis.

Para el segundo objetivo, abordaremos las posibles relaciones entre las siguientes afirmaciones:

- (1) $f \in \mathbb{M}$;
- (2) $C_n(f) \in \mathbb{M}$;
- (3) $C_K^n(f) \in \mathbb{M}$ para cada $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f) \in \mathbb{M}$ para algún $K \in 2^X$.

Donde \mathbb{M} es alguna de las siguientes clases de funciones: casi monótonas, atriódicas, confluentes, unión, ligeras, monótonas, abiertas, OM, pseudo-confluentes, quasi-monótonas, semi-confluentes, fuertemente libremente descomponibles, débilmente confluentes y débilmente monótonas.

Métodos

La mayor parte de la conducción del trabajo de investigación se realizará en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de México (UAEMéx), bajo la dirección del tutor académico Dr. Enrique Castañeda Alvarado y como tutores adjuntos, el Dr. José Guadalupe Anaya Ortega y el Dr. Norberto Ordoñez Ramírez. La Facultad de Ciencias de la UAEMéx, cuenta con una biblioteca, que contiene una colección de libros especializados en el área en que se va a realizar la investigación. El tesista podrá hacer uso de esta, así como del laboratorio de cómputo con el que se cuenta, mismo que está equipado con diversas computadoras con acceso a la red y con paquetería diversa que permite, entre otras cosas, la preparación automatizada de documentos científicos (\LaTeX). El tesista tendrá acceso a una oficina compartida en la Facultad de Ciencias de la UAEMéx, en donde podrá realizar su trabajo de tesis, bajo una supervisión cercana del tutor académico y tutores adjuntos.

Al inicio de las actividades, el tesista llevará dos cursos que son fundamentales para la investigación los cuales son: Temas Selectos de Teoría de Continuos y Temas Selectos de Topología. Así mismo, cursará Actividades de Investigación de Doctorado del I al VI, en donde se desarrollará el material que compondrá la tesis y en donde se indicará el trabajo matemático que el tesista tendrá que realizar por su propia cuenta con el fin de asimilar, depurar y aplicar correctamente los conceptos que conformarán su tesis de doctorado. Con el fin de que el tesista alcance la madurez matemática necesaria que le permita hacer mejor uso de las capacidades aprendidas, en la parte intermedia y final de su trabajo, el tesista realizará actividades de investigación que completen y complementen su trabajo de tesis. Estas actividades se reportarán al comité tutorial de manera semanal. Posteriormente, los resultados de investigación se publicarán en revistas indizadas.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este capítulo es introducir algunos conceptos básicos y propiedades que usaremos a lo largo de este trabajo, algunos otros conceptos y propiedades las iremos mencionando según sea necesario. Así mismo, dedicamos una sección de este capítulo a la introducción del hiperespacio $C_K^n(X)$.

1.1. Continuos e Hiperespacios

Esta sección es dedicada a conceptos básicos de Teoría de Continuos e Hiperespacios. También mencionamos algunos resultados, cuyas demostraciones son omitidas, no obstante se da una referencia para su consulta.

Continuos

A continuación damos la definición de *continuo*, que es base de este trabajo, no sin antes mencionar que la definición original de continuo, fue dada por G. Cantor en 1883 que dice que, un continuo es un subconjunto perfecto (es decir, cerrado y denso en sí mismo) de un espacio euclidiano.

Notación y Terminología General

- Un *continuo* X es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un *subcontinuo* es un subconjunto de X el cual es un continuo.

- Un espacio topológico X es *localmente conexo en* $x \in X$, si para cada abierto U de X tal que $x \in U$, existe un abierto conexo V de X tal que $x \in V \subset U$. Diremos que es *localmente conexo*, si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.
- Un *continuo de Peano* es un continuo localmente conexo.
- Un continuo X es *conexo en pequeño* en p si, cada vecindad de p contiene una vecindad conexa de p .
- Un continuo X es *descomponible*, si se puede escribir como la unión de dos subcontinuos propios; y diremos que es *hereditariamente descomponible* si cada subcontinuo no degenerado es descomponible.
- Un continuo X es *indescomponible*, si no es descomponible; y es *hereditariamente indescomponible*, si cada subcontinuo de él es indescomponible.
- Un continuo X es *unicoherente*, si para cualesquiera subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$, se cumple que $A \cap B$ es conexo; y es *hereditariamente unicoherente*, si cada subcontinuo de X es unicoherente (es decir, si la intersección de cualesquiera dos subcontinuos de X es conexa).
- Dado un subconjunto A de un espacio topológico X , denotamos la *cerradura*, el *interior* y la *frontera* de A por $\text{Cl}_X(A)$, $\text{Int}_X(A)$ y $\text{Bd}_X(A)$, respectivamente.
- Al conjunto de los enteros positivos lo denotaremos por \mathbb{N} .

Los siguientes, son algunos ejemplos de continuos, que usamos a lo largo de este trabajo.

Un *arco* es cualquier espacio homeomorfo al intervalo unitario $I = [0, 1]$.

Una *curva cerrada simple* es cualquier espacio homeomorfo a la circunferencia unitaria $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ con $3 \leq n < \infty$, un *n -odo simple* es un continuo homeomorfo al subespacio del plano euclidiano que resulta de unir con segmentos de recta, el punto $(0, 1)$ con los puntos $(1, 0)$, $(2, 0)$, \dots , $(n, 0)$.

El *abanico armónico* es un continuo homeomorfo al continuo que se obtiene al unir con segmentos de recta, el punto $(0, 1)$ con los puntos $(0, 0)$ y $(\frac{1}{n}, 0)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Un *disco* es cualquier espacio homeomorfo a

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, una *n-celda* es un espacio homeomorfo al producto $I^n = \prod_{j=1}^n I_j$, donde $I_j = [0, 1]$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$. Notemos que una 2-celda es un disco.

Un *cubo de Hilbert* es cualquier espacio homeomorfo al producto numerable $I^\infty = \prod_{j=1}^\infty I_j$ con la topología producto, donde $I_j = [0, 1]$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

Notación. Denotamos por $Y \approx Z$, si Y y Z son dos espacios topológicos homeomorfos.

Espacio Cociente

Dado un continuo X , una forma de obtener otros continuos es pegar o identificar algunos de sus puntos. Esta idea intuitiva es la del espacio cociente. Antes de dar la definición, necesitamos de lo siguiente:

Una *descomposición (o partición)* de un espacio topológico (no vacío) Z , es una colección de subconjuntos no vacíos de Z ajenos entre sí y cuya unión es Z .

Sean Z un espacio topológico y \mathcal{D} una descomposición de Z . La familia

$$\tau(\mathcal{D}) = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{D} : q^{-1}(\mathcal{U}) \text{ es un subconjunto abierto de } Z\}$$

es una topología para \mathcal{D} llamada *topología cociente*, en la cual la función $q : Z \rightarrow \mathcal{D}$ esta definida como $q(x) = D$, donde D es el único elemento de \mathcal{D} tal que $x \in D$, llamada *función cociente*. El espacio $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es llamado *espacio cociente*.

Observación 1.1.1. [17, 1.2, p. 121] *La topología $\tau(\mathcal{D})$ es la topología más grande que hace que la función q sea continua.*

El espacio cociente $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ también se conoce como *espacio de descomposición* o *espacio de identificación* de Z , o simplemente una *descomposición* de Z .

El siguiente ejemplo muestra que las descomposiciones de continuos, no necesariamente son continuos.

Ejemplo 1.1.2. [37, p. 37] Sea $X = [-1, 1]$ y sea \mathcal{D} la partición cerrada de X dada por

$$\mathcal{D} = \{\{x, -x\} : -1 < x < 1\} \cup \{\{-1\}, \{1\}\}.$$

Entonces, el espacio de descomposición $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ no es de Hausdorff, por lo tanto no es metrizable.

Sean Z un espacio métrico y \mathcal{D} una descomposición de Z . Decimos que \mathcal{D} es *semicontinua superiormente*, si para cada elemento $D \in \mathcal{D}$ y cada subconjunto abierto U de Z con $D \subset U$, existe un subconjunto abierto V de Z con $D \subset V$ y tal que si $A \in \mathcal{D}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subset U$.

La siguiente proposición da una forma equivalente de considerar a las descomposiciones semicontinuas superiormente.

Proposición 1.1.3. [37, Proposición 3.7, p. 39] Sean (Z, τ) un espacio topológico, \mathcal{D} una descomposición de Z , y sea $q : Z \rightarrow \mathcal{D}$ la función cociente. Entonces, \mathcal{D} es una descomposición semicontinua superiormente si y sólo si, q es una función cerrada.

Una de las condiciones adicionales sobre la descomposición para que el espacio cociente resultante sea un espacio métrico es que la descomposición sea semicontinua superiormente, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.1.4. [37, Teorema 3.9, p. 40] Sea Z un espacio métrico compacto. Si \mathcal{D} es una descomposición semicontinua superiormente de Z , entonces \mathcal{D} es metrizable.

Como consecuencia de la invarianza de la conexidad y la compacidad bajo funciones continuas y del Teorema 1.1.4, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.1.5. Sea X un continuo. Si \mathcal{D} es una descomposición semicontinua superiormente de X , entonces \mathcal{D} es un continuo.

En los siguientes ejemplos, mostramos como apartir de un continuo podemos obtener nuevos continuos identificando algunos de sus puntos.

1. En I^2 definimos $\mathcal{D}_1 = \{(0, 1 - y), (1, y) : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Nótese que \mathcal{D}_1 es una descomposición semicontinua superiormente de I^2 . Por el Teorema 1.1.5, el espacio cociente $(\mathcal{D}_1, \tau(\mathcal{D}_1))$ es un continuo, el cual se conoce como *banda de Möbius*.
2. En I^2 consideremos $\mathcal{D}_2 = \{(0, y), (1, y) : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Por el Teorema 1.1.5, el espacio cociente $(\mathcal{D}_2, \tau(\mathcal{D}_2))$ es un continuo, llamado *cilindro*.

Teorema 1.1.6. *Sean Z un espacio métrico y compacto, y A un subconjunto cerrado no vacío de Z , consideremos la siguiente descomposición de Z :*

$$\mathcal{D}_A = \{\{z\} : z \in Z - A\} \cup \{A\}.$$

Entonces, el espacio cociente $(\mathcal{D}_A, \tau(\mathcal{D}_A))$ es un espacio métrico con la topología cociente.

Demostración. Obsérvese que \mathcal{D} es una partición semicontinua superiormente. Por el Teorema 1.1.4, $(\mathcal{D}_A, \tau(\mathcal{D}_A))$ es un espacio métrico. \square

Notación. El espacio cociente $(\mathcal{D}_A, \tau(\mathcal{D}_A))$ del Teorema 1.1.6, se le denota comunmente por Z/A .

Como consecuencia inmediata del Teorema 1.1.6, de la Proposición 1.1.3, Teorema 1.1.5 y de la continuidad de la función cociente, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.1.7. *Sean X un continuo y A un subconjunto cerrado de X . Entonces*

- (1) X/A es un continuo.
- (2) $q : X \rightarrow X/A$ es una función cerrada.

Hiperespacios

La Teoría de Hiperespacios de Continuos nace aproximadamente en la década 1910-1920. Esta teoría tiene sus inicios con los trabajos de F. Hausdorff [19] y L. Vietoris [39]. Dado un espacio topológico X , el hiperespacio

2^X de todos los subconjuntos no vacíos y cerrados de X , fue introducido por L. Vietoris en 1922. En general, un *hiperespacio* es una colección de subconjuntos de X , con alguna característica particular.

Los hiperespacios de un continuo X más estudiados son:

$$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y cerrado}\};$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\};$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\};$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Al conjunto 2^X lo dotamos con la topología inducida por la métrica de Hausdorff (definida más adelante). Notemos que $C(X)$, $C_n(X)$ y $F_n(X)$ están contenidos en 2^X , de lo cual, podemos considerar a cada uno de ellos con la topología heredada de 2^X .

Observación 1.1.8. ■ $C(X) = C_1(X)$.

- $F_1(X) = \{\{p\} \in 2^X : p \in X\}$.
- $F_n(X) \subset F_{n+1}(X)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
- $C_n(X) \subset C_{n+1}(X)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Los siguientes son algunos modelos clásicos de hiperespacios que aparecen en la literatura.

- El hiperespacio de subcontinuos del intervalo I es el conjunto

$$C(I) = \{A \subset I : A = [a, b], 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

el cual es homeomorfo al conjunto $\{(a, b) : 0 \leq a \leq b \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ (ver Figura 1.1), la demostración se puede consultar en [24, Ejemplo 5.1, p. 33].

- El hiperespacio de subcontinuos de una curva cerrada simple S^1 es el conjunto

$$C(S^1) = \{A \subset S^1 : A \text{ es un punto, o un arco, o } S^1\}$$

el cual es homeomorfo a un disco (ver Figura 1.2), la demostración se puede consultar en [24, Ejemplo 5.2, p. 35].

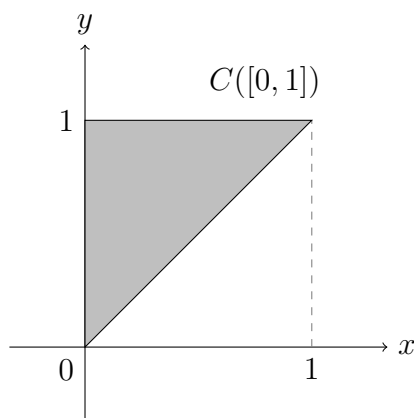


Figura 1.1: Hiperespacio $C(I)$.

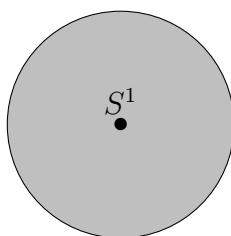


Figura 1.2: Hiperespacio $C(S^1)$.

- Si X es un continuo localmente conexo en el que todos los arcos tienen interior vacío, entonces $C_n(X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert, para todo n , véase [30, Teorema 7.1, p. 250].
- El hiperespacio $C_2(I)$ es homeomorfo a $[0, 1]^4$, véase [22, Lema 2.2, p. 349] (esto es un resultado de R. M. Schori).
- El hiperespacio $C_2(S^1)$ es homeomorfo al cono sobre una “dona rellena”, el cual no se puede construir en \mathbb{R}^3 si no en \mathbb{R}^4 , véase [23].

Sean X un continuo con métrica d y $\epsilon > 0$. Consideremos $x \in X$ y $A \in 2^X$, definimos en X la *bola abierta de radio ϵ y centro x* como el conjunto

$$B_\epsilon^d(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\},$$

y la *nube de radio ϵ alrededor de A* como

$$N_d(A, \epsilon) = \bigcup_{x \in A} B_\epsilon^d(x).$$

Dotamos al hiperespacio 2^X con la *métrica de Hausdorff*, H_d , véase [24, Definición 2.1, p. 11], definida de la siguiente forma: Para cada $A, B \in 2^X$,

$$H_d(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N_d(B, \epsilon) \text{ y } B \subset N_d(A, \epsilon)\}.$$

Por otro lado, podemos definir otra topología para 2^X de la siguiente forma.

Dada cualquier cantidad finita de subconjuntos U_1, \dots, U_r de X , definimos $\langle U_1, \dots, U_r \rangle$ como el conjunto

$$\{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^r U_i, A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i = 1, \dots, r\}.$$

Teorema 1.1.9. [24, Teorema 1.2, p. 3] *Dado X un continuo. La familia*

$$\{\langle U_1, \dots, U_r \rangle : \text{para cada } i \in \{1, \dots, r\}, U_i \text{ es un abierto de } X, r \in \mathbb{N}\}$$

es una base para alguna topología sobre 2^X .

La topología definida en el Teorema 1.1.9, se llama *topología de Vietoris* para 2^X y la denotamos por T_V .

Teorema 1.1.10. [24, Teorema 3.2, p. 18] *Si X es un continuo, la topología inducida por la métrica de Hausdorff, T_{H_d} , y la topología de Vietoris, T_V para 2^X , coinciden.*

Notación. Dado $n \in \mathbb{N}$, denotamos $\langle U_1, \dots, U_r \rangle \cap C_n(X)$ por $\langle U_1, \dots, U_r \rangle_n$.

Teorema 1.1.11. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces los siguientes son ciertos:*

- (a) 2^X es un continuo ([32, Corolario 1.8.9, p. 62]).
- (b) $C_n(X)$ es un continuo ([32, Corolario 1.8.12, p. 62]).
- (c) $F_n(X)$ es un continuo ([32, Corolario 1.8.8, p. 63]).

Algunas de las herramientas de gran utilidad en los hiperespacios 2^X y $C_n(X)$ son los arcos ordenados y las funciones de Whitney que definimos a continuación.

Dado un continuo X , sean $A, B \in 2^X$. Un *arco ordenado* de A a B es una función continua $\alpha : I \rightarrow 2^X$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$, y $\alpha(r)$ es un subconjunto propio de $\alpha(s)$ cuando $r < s$. La definición y existencia pueden consultarse en [35, Definición 1.2, p. 57] y [35, Teorema 1.8, p. 59], respectivamente.

Teorema 1.1.12. [35, Teorema 1.8, p. 59] *Dado X un compacto y sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Entonces, existe un arco ordenado de A a B en 2^X , si y sólo si $A \subset B$ y cada componente de B interseca a A .*

Sean X un compacto y $\mathcal{H} \subset 2^X$. Una *función de Whitney para \mathcal{H}* es una función continua $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $\mu(A) < \mu(B)$ para cualquier $A, B \in \mathcal{H}$ tales que $A \subset B$ y $A \neq B$;
2. $\mu(A) = 0$ si y sólo si $A \in \mathcal{H} \cap F_1(X)$.

Teorema 1.1.13. [24, Teorema 13.4, p. 107] *Si X es un espacio metrizable compacto y no vacío, entonces existe una función de Whitney para cualquier hiperespacio de X .*

Las funciones inducidas son herramienta que relacionan hiperespacios de continuos. A continuación damos la definición de función inducida.

Una función entre continuos $f : X \rightarrow Y$ induce una función natural $f^* : 2^X \rightarrow 2^Y$ definida por

$$f^*(A) = f(A) \text{ para todo } A \in 2^X.$$

Así, si $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C(X), F_n(X), C_n(X)\}$, entonces la función inducida $\mathcal{H}(f) : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(Y)$ es la función $\mathcal{H}(f) = f^*|_{\mathcal{H}(X)}$, véase [24, Definición 77.1, p. 381].

Por [24, Lema 13.3, p. 106] tenemos la siguiente observación.

Observación 1.1.14. *La función inducida f^* es continua. Además, $\mathcal{H}(f)$ es una función continua.*

1.2. El hiperespacio $C_n(X)/C_{nK}(X)$

En esta sección recordamos brevemente algunos hiperespacios cociente que ya han sido estudiados, así como quien los ha estudiado e introducimos el hiperespacio cociente $C_n(X)/C_{nK}(X)$ que es nuestro objeto de estudio.

Uno de los primeros hiperespacios cociente se define en el año 1979 por Sam B. Nadler, Jr. en [36], este es llamado *hiperespacio suspensión* del continuo X y se define como el espacio cociente

$$HS(X) = C(X)/F_1(X).$$

Más tarde, en el año 2004, R. Escobedo, M. de J. López y S. Macías extendieron el estudio del hiperespacio suspensión en [18]. En el mismo año, S. Macías generalizó el estudio del hiperespacio suspensión, considerando el espacio cociente

$$HS_n(X) = C_n(X)/F_n(X),$$

llamado el *n-ésimo hiperespacio suspensión* de X en [31], continuando con el estudio de este hiperespacio en 2006, véase [33].

Para el año 2008, J. C. Macías en [27] analizó el espacio cociente

$$PHS_n(X) = C_n(X)/F_1(X),$$

llamado el *n-ésimo pseudo-hiperespacio suspensión* de X .

El trabajo más reciente es del año 2016, J. Camargo y S. Macías en [10] consideraron el espacio cociente

$$C_1^n(X) = C_n(X)/C_1(X).$$

Siguiendo esta línea de investigación, definimos un nuevo espacio cociente, para el cual estudiamos algunas de sus propiedades en el siguiente capítulo.

Sean X un continuo y $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C_n(X), F_n(X)\}$ con $n \in \mathbb{N}$. Dado K un subconjunto cerrado de X , el conjunto

$$\{A \in \mathcal{H}(X) : K \subset A\}$$

denotado por $\mathcal{H}_K(X)$ se conoce como el *hiperespacio contención para K en $\mathcal{H}(X)$* .

Observación 1.2.1. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $F_{n_K}(X) \neq \emptyset$ si y sólo si $|K| \leq n$.

Proposición 1.2.2. Sean X un continuo, K un subconjunto cerrado de X y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C_n(X), F_n(X)\}$, entonces $\mathcal{H}_K(X)$ es cerrado en $\mathcal{H}(X)$.

Demostración. Dado que $2_K^X \cap \mathcal{H}(X) = \mathcal{H}_K(X)$, basta mostrar que 2_K^X es cerrado. Sea $B \in 2^X - 2_K^X$, como $K \not\subset B$, existe $k_0 \in K - B$. Sean U y V dos abiertos ajenos tales que $k_0 \in U$ y $B \subset V$. Entonces $B \in \langle V \rangle$ y $\langle V \rangle \cap 2_K^X = \emptyset$. Así, $2^X - 2_K^X$ es abierto. \square

Proposición 1.2.3. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si K un subconjunto cerrado de X , entonces $F_{n_K}(X)$, $C_{n_K}(X)$ y 2_K^X son conexos.

Demostración. Veamos que $F_{n_K}(X)$ es conexo. Por la Observación 1.2.1 tenemos que $|K| \leq n$. Si $|K| = n$, entonces $|F_{n_K}(X)| = 1$, con lo cual $F_{n_K}(X)$ es conexo. Supongamos que $|K| < n$ y sea $A \in F_{n_K}(X)$ tal que $A \neq K$. Sea $l = |A - K|$, definimos una función $f : X^l \rightarrow F_{n_K}(X)$ dada por $f(x_1, \dots, x_l) = K \cup \{x_1, \dots, x_l\}$, la cual es continua. Notemos que $K, A \in f(X^l)$ y $f(X^l)$ es conexo. Como A es arbitrario, $F_{n_K}(X)$ es conexo. Ahora, veamos que 2_K^X es conexo. Sea $A \in 2_K^X$, notemos que $X \in 2_K^X$ pues $K \subset A \subset X$. Por el Teorema 1.1.12, existe $\alpha : I \rightarrow \mathcal{H}(X)$ un arco ordenado de A a X tal que $K \subset A \subset \alpha(t) \subset X$ para cada $t \in (0, 1)$. Por lo que, $\alpha(I) \subset 2_K^X$. De que A es arbitrario, 2_K^X es conexo. La prueba de que $C_{n_K}(X)$ es conexo, es similar a la de 2_K^X . \square

A continuación definimos en general otros hiperespacios cociente que abren un amplio campo de estudio.

Sean X un continuo y K un subconjunto cerrado de X . Dado $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C_n(X), F_n(X)\}$ con $n \in \mathbb{N}$, definimos el espacio cociente

$$\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}_K(X)$$

con la topología cociente.

Teorema 1.2.4. Sean X un continuo, K un subconjunto cerrado de X y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C_n(X), F_n(X)\}$, entonces $\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}_K(X)$ es un continuo y la función cociente $q : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)/\mathcal{H}_K(X)$ es cerrada.

Demostración. Por el Teorema 1.1.11, $\mathcal{H}(X)$ es un continuo. De la Proposición 1.2.2, $\mathcal{H}_K(X)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{H}(X)$. Así, por el Corolario 1.1.7, $\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}_K(X)$ es un continuo y la función cociente $q : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)/\mathcal{H}_K(X)$ es cerrada. \square

En el resto de este trabajo, estudiamos algunas propiedades del espacio cociente $C_n(X)/C_{n_K}(X)$, dicho espacio es el motivo por el cual se desarrolla este proyecto de tesis. Cabe mencionar que este espacio cociente se agrega a la lista mencionada al comienzo de esta sección. Para su estudio convenimos la siguiente notación.

Notación. Sean X un continuo, $K \in 2^X$ y $n \in \mathbb{N}$.

- Denotamos por $C_K^n(X)$ al espacio cociente $C_n(X)/C_{n_K}(X)$.
- $\pi_K^X : C_n(X) \rightarrow C_K^n(X)$ denota la función cociente.
- $C_{n_K}^X = \pi_K^X(C_{n_K}(X))$.

Observación 1.2.5. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $K = X$, entonces $C_K^n(X)$ es homeomorfo a $C_n(X)$.

Como una consecuencia de la definición de π_K^X , se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.2.6. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $K \in 2^X$. Entonces

$$\pi_K^X|_{C_n(X)-C_{n_K}(X)} : C_n(X) - C_{n_K}(X) \rightarrow C_K^n(X) - \{C_{n_K}^X\}$$

es un homeomorfismo.

Capítulo 2

Propiedades Topológicas del espacio $C_K^n(X)$

En este capítulo abordamos algunas propiedades topológicas del hiperespacio $C_K^n(X)$ como lo son: conexidad, conexidad local, arco desconexidad, contractibilidad, unicoherencia, aposindesis y dedicamos una sección al estudio de $C_K^n(X)$ cuando X es una gráfica finita.

2.1. Conexidad

Teorema 2.1.1. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_K^n(X)$ es un continuo arco conexo para cada $K \in 2^X$.*

Demostración. Sea $K \in 2^X$. Por [30, Teorema 3.1, p. 240], $C_n(X)$ es un continuo arco conexo. Además, π_K^X es una función continua. Entonces $C_K^n(X)$ es un continuo arco conexo. \square

Lema 2.1.2. *Sean X un continuo, $K \in 2^X$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ es localmente conexo, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Sea $x \in X$. Supongamos que $x \notin K$, sea V un subconjunto abierto de X tal que $x \in V$. Así, $W = V \cap (X - K)$ es un subconjunto abierto de X que contiene a x , con lo cual $\{x\} \in \langle W \rangle_n \subset C_n(X) - C_{n_K}(X)$. Como $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ es localmente conexo, existe un abierto conexo $\mathcal{U} \subset C_n(X) - C_{n_K}(X)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{U} \subset \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{U}) \subset \langle W \rangle_n$. Consideremos $H = \bigcup \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{U})$. Por [35, Lema 1.49, p. 102], H es un subcontinuo de X .

Notemos que $x \in H \subset W \subset V$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon^H(\{x\}) \cap C_n(X) \subset \mathcal{U}$. Si $y \in B_\epsilon(x)$, $\{y\} \in B_\epsilon^H(\{x\}) \cap C_n(X) \subset \mathcal{U}$. Así, $\{y\} \in \mathcal{U}$ y $y \in H$. Entonces, $x \in \text{Int}_X(H) \subset W \subset V$.

Ahora, supongamos que $x \in K$ y $K \notin F_1(X)$, entonces existe $z \in K$ tal que $z \neq x$. Sea V un subconjunto abierto de X tal que $x \in V$. Como $W = V \cap (X - \{z\})$ es un subconjunto abierto de X que contiene a x , se tiene que $\{x\} \in \langle W \rangle_n \subset C_n(X) - C_{n_K}(X)$. Entonces, podemos proceder como antes.

Finalmente, si $\{x\} = K$, por [37, Corolario 5.13, p. 78] y el argumento previo, X no puede ser conexo en pequeño en un solo punto. Entonces, X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Por lo tanto, X es localmente conexo. \square

Teorema 2.1.3. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $K \in 2^X$. Entonces, X es un continuo de Peano si y sólo si $C_K^n(X)$ es un continuo de Peano.*

Demostración. Si X es localmente conexo, por [30, Teorema 3.2, p. 240] $C_n(X)$ es localmente conexo. Por el Teorema 1.2.4, π_K^X es una función continua y cerrada. Entonces, por [37, Proposición 8.16, p. 127], $C_K^n(X)$ es localmente conexo.

Ahora, supongamos que $C_K^n(X)$ es localmente conexo, entonces $C_K^n(X) - \{C_{n_K}^X\}$ es localmente conexo. Así, por la Proposición 1.2.6, $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ es localmente conexo. Por el Lema 2.1.2, X es localmente conexo. \square

El siguiente resultado es consecuencia del Teorema 2.1.3.

Corolario 2.1.4. *Sea X un continuo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. X es un continuo de Peano;
2. $C_K^n(X)$ es un continuo de Peano para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $K \in 2^X$;
3. $C_K^n(X)$ es un continuo de Peano para algún $n \in \mathbb{N}$ y cada $K \in 2^X$;
4. $C_K^n(X)$ es un continuo de Peano para cada $n \in \mathbb{N}$ y algún $K \in 2^X$;
5. $C_K^n(X)$ es un continuo de Peano para algún $n \in \mathbb{N}$ y algún $K \in 2^X$.

Teorema 2.1.5. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si $K \in 2^X - F_1(X)$, entonces $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ es conexo.*

Demostración. Sea $K \in 2^X - F_1(X)$. Notemos que $C_{n_K}(X) \cap F_1(X) = \emptyset$. Sea $A \in C_n(X) - C_{n_K}(X)$, supongamos que $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$ con $1 \leq m \leq n$. Consideremos $a_i \in A_i$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Por el Teorema 1.1.12, existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ tal que $\alpha(0) = \{a_1, \dots, a_m\}$ y $\alpha(1) = A$. Como $K \not\subset A$, existe $k_0 \in K - A$ y $K \not\subset \alpha(t)$ para cada $t \in [0, 1]$. Como $K \notin F_1(X)$, supongamos sin pérdida de generalidad que $a_1 \in K \cap \alpha(0)$. Para cada $i \in \{1, \dots, m-1\}$, sea $\gamma_i : X \rightarrow C_n(X)$ definida por $\gamma_i(x) = \{x\} \cup (\alpha(0) - \{a_1, \dots, a_i\})$. γ_i esta bien definida y es una función continua. Además, $\{k_0, a_1\} \not\subset \gamma_i(x)$ para cada $i \in \{1, \dots, m-1\}$ y cada $x \in X$. Entonces, $\Gamma_i = \gamma_i(X)$ es conexo y $\Gamma_i \subset C_n(X) - C_{n_K}(X)$. Como $\alpha(0) - \{a_1, \dots, a_{i-1}\} \in \Gamma_{i-1} \cap \Gamma_i$ para cada $i \in \{2, \dots, m-1\}$, entonces $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{m-1} \Gamma_i$ es un subconjunto conexo que contiene a $\alpha(0)$ y $\{a_m\}$. Así, $\alpha([0, 1]) \cup \Gamma \cup F_1(X)$ es un subconjunto conexo de $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ que contiene a A . En otro caso, si $K \cap \alpha(0) = \emptyset$, entonces el argumento anterior muestra que existe un subconjunto conexo \mathcal{L} de $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ que contiene a A y $\mathcal{L} \cap F_1(X) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ es conexo. \square

2.2. Arco desconexidad

En esta sección consideramos cuando un punto arco desconecta a $C_K^n(X)$.

Teorema 2.2.1. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $K \in 2^X$. Si $A \in C(X) - C_K(X)$, entonces $C_K^n(X) - \pi_K^X(C_n(A))$ es arco conexo.*

Demostración. Como $A \in C(X) - C_K(X)$, por [30, Teorema 6.1, p. 246], tenemos que $C_n(X) - C_n(A)$ es arco conexo. Así, $\pi_K^X(C_n(X) - C_n(A)) = C_K^n(X) - \pi_K^X(C_n(A))$ es arco conexo. \square

Teorema 2.2.2. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $K \in 2^X$. Si $\mathcal{A} \in C_K^n(X) - \{C_{n_K}^X\}$ tal que $C_K^n(X) - \{\mathcal{A}\}$ no es arco conexo, entonces $(\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{A})$ es conexo.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \in C_K^n(X) - \{C_{n_K}^X\}$. Entonces, $(\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{A}) \in C_n(X)$. Como $(\pi_K^X)^{-1}(C_K^n(X) - \{\mathcal{A}\}) = C_n(X) - \{(\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{A})\}$ y $C_K^n(X) - \{\mathcal{A}\}$ no es arco conexo, $C_n(X) - \{(\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{A})\}$ no es arco conexo. Así, por [30, Teorema 6.2, p. 246], $(\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{A})$ es conexo. \square

Teorema 2.2.3. *Un continuo no degenerado X es indescomponible si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_K^n(X) - \{C_{n_K}^X\}$ no es arco conexo para cada $K \in 2^X$.*

Demostración. Sea $K \in 2^X$. Sean x y y puntos en diferentes componentes de X . Como X es un continuo indescomponible, para cada función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ tal que $\alpha(0) = \{x\}$ y $\alpha(1) = \{y\}$, existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que $K \subset \alpha(t_0)$. Por lo que, $\alpha(t_0) \in C_{n_K}(X)$. Así, $\alpha([0, 1]) \not\subset C_n(X) - C_{n_K}(X)$. Por la Proposición 1.2.6, concluimos que $C_K^n(X) - \{C_{n_K}^X\}$ no es arco conexo. Inversamente, supongamos que existen X_1 y X_2 subcontinuos propios de X tales que $X = X_1 \cup X_2$. Consideremos $r \in X_1 - X_2$ y $q \in X_2 - X_1$. Por la Proposición 1.2.6, es suficiente probar que $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ es arco conexo cuando $K = \{r, q\}$. Consideremos $p \in X_1 \cap X_2$, notemos que $\{p\} \in C_n(X) - C_{n_K}(X)$. Sea $A \in C_n(X) - C_{n_K}(X)$. Supongamos que $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$ con $1 \leq m \leq n$ donde $A_i \in C(X)$ para cada $i = 1, \dots, m$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que existen $1 \leq s \leq t \leq m$ tales que:

- (a) $A_l \subset X_1$ donde $1 \leq l \leq s$,
- (b) $A_l \subset X_2$ donde $s + 1 \leq l \leq t$ y,
- (c) $A_l \cap (X_1 \cap X_2) \neq \emptyset$ y $A_l \not\subset X_i$ para cada $i = 1, 2$ donde $t + 1 \leq l \leq m$.

Caso (a). Construiremos un arco de A a $\{p\} \cup (\bigcup_{i=s+1}^m A_i)$. Como $C_s(X_1)$ es arco conexo y $A_1 \cup \dots \cup A_s, \{p\} \in C_s(X_1)$, existe $\alpha : [0, 1] \rightarrow C_s(X_1)$ un arco tal que $\alpha(0) = A_1 \cup \dots \cup A_s$ y $\alpha(1) = \{p\}$. Ahora, sea $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ una función definida por $\gamma_1(t) = \alpha(t) \cup (\bigcup_{i=s+1}^m A_i)$. Entonces γ_1 esta bien definida y es continua. De que $q \notin X_1, K \not\subset \alpha(t)$ para cada $t \in [0, 1]$. Además, $\mathcal{A}_1 = \gamma_1([0, 1])$ es un arco que contiene a A y $\{p\} \cup (\bigcup_{i=s+1}^m A_i)$.

Caso (b). Construimos un arco de $\{p\} \cup (\bigcup_{i=s+1}^m A_i)$ a $\{p\} \cup (\bigcup_{i=t+1}^m A_i)$. Como $C_{t-s}(X_2)$ es arco conexo y $A_{s+1} \cup \dots \cup A_t, \{p\} \in C_{t-s}(X_2)$, existe $\beta : [0, 1] \rightarrow C_{t-s}(X_2)$ un arco tal que $\beta(0) = A_{s+1} \cup \dots \cup A_t$ y $\beta(1) = \{p\}$. Definimos $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ por $\gamma_2(t) = \beta(t) \cup \{p\} \cup (\bigcup_{i=t+1}^m A_i)$. γ_2 es una función continua. De que $r \in X_1, K \not\subset \beta(t)$ para cada $t \in [0, 1]$. Además, $\mathcal{A}_2 = \gamma_2([0, 1])$ es un arco que contiene a $\{p\} \cup (\bigcup_{i=s+1}^m A_i)$ y $\{p\} \cup (\bigcup_{i=t+1}^m A_i)$. Notemos que $\{p\} \cup \bigcup_{i=s+1}^m A_i \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, entonces $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ es arco conexo.

Caso (c). Vamos a construir un arco de $\{p\}$ a $\{p\} \cup (\bigcup_{i=t+1}^m A_i)$. Para cada $j \in \{t + 1, \dots, m\}$ elegimos $a_j \in A_j \cap X_1$. Existe $\eta : [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ un arco ordenado tal que $\eta(0) = \{a_{t+1}, \dots, a_m\}$ y $\eta(1) = A_{t+1} \cup \dots \cup A_m$. Notemos que $K \not\subset \eta(t)$ para cada $t \in [0, 1]$. De que $C_{m-t}(X_1)$ es arco conexo y $\{a_{t+1}, \dots, a_m\}, \{p\} \in C_{m-t}(X_1)$, existe un arco $\eta_0 : [0, 1] \rightarrow C_{m-t}(X_1)$ tal que $\eta_0(1) = \{a_{t+1}, \dots, a_m\}$ y $\eta_0(0) = \{p\}$. Sea $\gamma_3 : [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ definida

por

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} \eta_0(2t) \cup \{p\}, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \eta(2t-1) \cup \{p\}, & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

γ_3 es una función continua. Además, $K \not\subset \gamma_3(t)$ para cada $t \in [0, 1]$. Con lo cual $\mathcal{A}_3 = \gamma_3([0, 1])$ es un arco tal que $\mathcal{A}_3 \subset C_n(X) - C_{n_K}(X)$ que contiene a $\{p\}$ y $\{p\} \cup (\bigcup_{i=t+1}^m A_i)$.

Nótese que $\{p\} \cup (\bigcup_{i=t+1}^m A_i) \in \mathcal{A}_3 \cap (\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$, entonces $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$ es arco conexo.

Ahora, si $K \cap A = \emptyset$, entonces $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$ es un subcontinuo arco conexo de $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ conteniendo a $\{p\}$ y A . Pero, si $A \cap K \neq \emptyset$, existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $A_j \cap K \neq \emptyset$. De que $K \not\subset A$, podemos suponer que $r \in A_j$. Así, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $j = 1$, o, $j = t+1$. Si $j = 1$, se construyen \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 y \mathcal{A}_3 como antes. Y, para $j = t+1$, se construye el continuo $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$ en el siguiente orden \mathcal{A}_3 , \mathcal{A}_2 , y \mathcal{A}_1 para evitar contener a K . De cualquier manera llegamos a una contradicción. \square

El siguiente teorema es consecuencia de [30, Teorema 6.6, p. 248].

Teorema 2.2.4. *Sea X un continuo. Entonces, para cualquier $K \in 2^X$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) $2^X / 2_K^X - \{2_K\}$ no es arco conexo,
- (2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_K^n(X) - \{C_{n_K}^X\}$ no es arco conexo,
- (3) $C(X) - \{C_K\}$ no es arco conexo.

Lema 2.2.5. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos U un conjunto abierto de X y C una componente de U . Entonces $\langle C \rangle_n$ es una componente del conjunto abierto $\langle U \rangle_n$.*

Demostración. Dado que C es conexo, $\langle C \rangle_n$ es conexo. Sean \mathcal{C} una componente de $\langle U \rangle_n$ que contiene a $\langle C \rangle_n$ y $A \in \mathcal{C}$. De que $\langle C \rangle_n \cap C(X) \neq \emptyset$, por [20, Lema 1, p. 1578], $\bigcup \mathcal{C} \subset U$ es un subconjunto conexo que contiene a C . Como C es una componente de U , $A \subset \bigcup \mathcal{C} \subset C$. Entonces, $A \in \langle C \rangle_n$. Por lo tanto, $\langle C \rangle_n = \mathcal{C}$. \square

Sea Z un espacio topológico, denotamos por $\mathcal{C}(Z)$ al conjunto

$$\{A \subset Z : A \text{ es una componente de } Z\}.$$

Corolario 2.2.6. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $p \in X$ y $A \subset X$. Entonces, $A \in \mathcal{C}(X - \{p\})$ si y sólo si $\langle A \rangle_n \in \mathcal{C}(C_n(X) - C_{n\{p\}}(X))$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{C}(X - \{p\})$. Por Lema 2.2.5, $\langle A \rangle_n$ es una componente de $\langle X - \{p\} \rangle_n$. Como $\langle X - \{p\} \rangle_n = C_n(X) - C_{n\{p\}}(X)$, $\langle A \rangle_n \in \mathcal{C}(C_n(X) - C_{n\{p\}}(X))$.

Ahora, sea $A \subset X$ tal que $\langle A \rangle_n \in \mathcal{C}(C_n(X) - C_{n\{p\}}(X))$. Entonces $p \notin A$. Consideremos D una componente de $X - \{p\}$ tal que $A \subset D$. Tenemos que $\langle A \rangle_n \subset \langle D \rangle_n$. De que $\langle A \rangle_n \in \mathcal{C}(C_n(X) - C_{n\{p\}}(X))$. Se sigue que, $\langle A \rangle_n = \langle D \rangle_n$ y $A = D$. \square

Corolario 2.2.7. Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces, $|\mathcal{C}(X - \{p\})| = |\mathcal{C}(C(X) - C_{\{p\}}(X))|$.

Teorema 2.2.8. Sean X un continuo, $\mu : C(X) \rightarrow [0, \infty)$ una función de Whitney y $K \in C(X) - F_1(X)$. Si $t_0 < \mu(K)$ cumple que $\mu^{-1}(t_0)$ es arco conexo, entonces $C(X) - C_K(X)$ es arco conexo.

Demostración. Sean $A \in C(X) - C_K(X)$ y $B \in \mu^{-1}(t_0)$. Si $\mu(A) = t_0$, como $\mu^{-1}(t_0)$ es arco conexo, existe un arco de A a B contenido en $\mu^{-1}(t_0)$.

Supongamos que $\mu(A) < t_0$. Existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = X$. Así, $t_0 \in \mu(\alpha([0, 1])) = [\mu(A), \mu(X)]$. Por el Teorema del Valor Intermedio, existe $t \in (0, 1)$ tal que $\alpha(t) \in \mu^{-1}(t_0)$. Como $\mu^{-1}(t_0)$ es arco conexo, existe un arco de $\alpha(t)$ a B . Entonces, existe un arco $\gamma : [0, 1] \rightarrow C(X)$ de A a B . Notemos que $\mu(\gamma(s)) \leq t_0$ para cada $s \in [0, 1]$ y $\mu(D) > t_0$ para cada $D \in C_K(X)$. Con lo que $\gamma([0, 1]) \subset C(X) - C_K(X)$.

Por otro lado, supongamos que $\mu(A) > t_0$. Sea $a \in A$, existe un arco ordenado $\beta : [0, 1] \rightarrow C(X)$ tal que $\beta(0) = \{a\}$ y $\beta(1) = A$. Así, $t_0 \in \mu(\beta([0, 1])) = [\mu(\{a\}), \mu(A)]$. Por el Teorema del Valor Intermedio, existe $s \in (0, 1)$ tal que $\beta(s) \in \mu^{-1}(t_0)$. Nótese que $\beta([s, 1]) \cap C_K(X) = \emptyset$, de otra manera, $K \subset \beta(s_0)$ para algún $s_0 \in [s, 1]$ y $K \subset A$, lo cual es una contradicción. Como $\mu^{-1}(t_0)$ es arco conexo, existe un arco entre $\beta(s)$ y B . Entonces, existe un arco en $C(X) - C_K(X)$ de A a B . Por tanto, $C(X) - C_K(X)$ es arco conexo. \square

Como consecuencia del Teorema 2.2.8 y de [24, Teorema 33.4, p. 248] se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.2.9. Si X es un continuo encadenable por continuos y $K \in C(X) - F_1(X)$, entonces $C(X) - C_K(X)$ es arco conexo.

2.3. Celdas en el hiperespacio $C_K^n(X)$

Teorema 2.3.1. *Sea X un continuo no degenerado y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $C_K^n(X)$ contiene una n -celda para cada $K \in 2^X$.*

Demostración. Sean $K \in 2^X$ y $x \in K$. Consideremos A_1, \dots, A_n , n subcontinuos no degenerados de $X - \{x\}$ y disjuntos a pares. Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, sean $a_j \in A_j$ y un arco ordenado $\alpha_j : [0, 1] \rightarrow C(A_j)$ tal que $\alpha_j(0) = \{a_j\}$ y $\alpha_j(1) = A_j$. Notemos que $K \not\subset \alpha_j(t)$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ y cada $t \in [0, 1]$. Entonces la función $\beta : [0, 1]^n \rightarrow C_K^n(X)$ definida por $\beta((t_1, \dots, t_n)) = \pi_K^X(\alpha_1(t_1) \cup \dots \cup \alpha_n(t_n))$ es un encaje de $[0, 1]^n$ en $C_K^n(X)$. \square

Teorema 2.3.2. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $K \in 2^X$. Si $X - \{x\}$ contiene n subcontinuos descomponibles disjuntos a pares, para algún $x \in K$, entonces $C_K^n(X)$ contiene una $2n$ -celda.*

Demostración. Sean M_1, \dots, M_n , n subcontinuos descomponibles de $X - \{x\}$ y disjuntos a pares. Supongamos que $M_j = A_j \cup B_j$, donde A_j y B_j son subcontinuos, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$. Por la prueba de (1.145) de [35], podemos asumir que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $A_j \cap B_j$ es conexo, $A_j - (A_j \cap B_j) \neq \emptyset$, $B_j - (A_j \cap B_j) \neq \emptyset$, y $[A_j - (A_j \cap B_j)] \cap [B_j - (A_j \cap B_j)] = \emptyset$. Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, sean $\alpha_j : [0, 1] \rightarrow C(A_j)$ y $\beta_j : [0, 1] \rightarrow C(B_j)$ arcos ordenados tales que $\alpha_j(0) = A_j \cap B_j$, $\alpha_j(1) = A_j$, $\beta_j(0) = A_j \cap B_j$ y $\beta_j(1) = B_j$. Entonces la función $\gamma : [0, 1]^{2n} \rightarrow C_K^n(X)$ dada por $\gamma(t_1, \dots, t_{2n}) = \pi_K^X(\bigcup_{j=1}^n (\alpha_j(t_{2j-1}) \cup \beta_j(t_{2n}))$) es un encaje de $[0, 1]^{2n}$ en $C_K^n(X)$. \square

2.4. Contractibilidad

Sean Y y Z espacios topológicos. Una función continua $H : Y \times I \rightarrow Z$ es llamada *homotopía*. Si $f, g : Y \rightarrow Z$ son dos funciones continuas, diremos que f es *homotópica a g* si existe una homotopía $H : Y \times I \rightarrow Z$ tal que $H(y, 0) = f(y)$ y $H(y, 1) = g(y)$ para toda $y \in Y$.

Un espacio topológico Z , decimos que es *contráctil* si la función identidad de Z es homotópica a una función constante de Z en Z .

Teorema 2.4.1. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $C_{nK}(X)$ es contráctil para cada $K \in 2^X$.*

Demostración. Sea $K \in 2^X$. Consideremos un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow 2^X$ tal que $\alpha(0) = K$ y $\alpha(1) = X$. Sea $H : C_{nK}(X) \times [0, 1] \rightarrow C_{nK}(X)$ una función

definida por $H(A, t) = \alpha(t) \cup A$. Probaremos que $H(C_{n_K}(X) \times [0, 1]) \subset C_{n_K}(X)$. Sean $A \in C_{n_K}(X)$ y $t \in [0, 1]$. De que $K \subset A$, por el Teorema 1.1.12, cada componente de $\alpha(t)$ intersecta a K para cada $t \in [0, 1]$. Entonces cada componente de $\alpha(t)$ intersecta a A . Así, $\alpha(t) \cup A$ tiene a lo más n componentes, es decir, H esta bien definida. Por [24, Ejercicio 11.5, p. 91], H es continua. Como $H(A, 0) = \alpha(0) \cup A = A$ y $H(A, 1) = \alpha(1) \cup A = X$ para cada $A \in C_{n_K}(X)$, tenemos que $C_{n_K}(X)$ es contráctil. \square

Teorema 2.4.2. *Sea X un continuo y sea $n \in \mathbb{N}$. Consideremos las siguientes afirmaciones:*

- (1) $C_n(X)$ es contráctil;
- (2) $C_K^n(X)$ es contráctil para cada $K \in 2^X$;
- (3) $C_K^n(X)$ es contráctil para algún $K \in 2^X$.

Entonces, (1) y (2) son equivalentes, y (2) implica (3).

Demostración. (2) implica (3) es inmediato. Mostraremos que (1) implica (2). Sea $K \in 2^X$. Supongamos que $C_n(X)$ es contráctil, entonces existe una función continua $H' : C_n(X) \times [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ tal que $H'(A, 0) = A$ y $H'(A, 1) = X$ para cada $A \in C_n(X)$. Sea $H : C_n(X) \times [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ definida por

$$H(A, t) = \bigcup \{H'(A, s) : 0 \leq s \leq t\}.$$

Por [35, Lema 16.3, p. 533], tenemos que H es una función continua. Obsérvese que $H|_{\{A\} \times [0, 1]}$ es un arco ordenado de A a X para cada $A \in C_n(X)$.

Afirmación. $H(C_{n_K}(X) \times [0, 1]) = C_{n_K}(X)$.

Como $C_{n_K}(X) = H(C_{n_K}(X) \times \{0\})$, entonces $C_{n_K}(X) \subset H(C_{n_K}(X) \times [0, 1])$.

Ahora, sea $A \in C_{n_K}(X)$. De que $H(A, 0) = A$ y $H(A, 0) \subset H(A, t)$ para cada $t \in [0, 1]$, entonces $K \subset A \subset H(A, t)$. Así, $H(A, t) \in C_{n_K}(X)$.

Por otro lado, definimos una función $G : C_K^n(X) \times [0, 1] \rightarrow C_K^n(X)$ por $G(\mathcal{A}, t) = \pi_K^X(H((\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{A}), t))$ la cual es continua y además para cada $\mathcal{A} \in C_K^n(X)$, $G(\mathcal{A}, 0) = \mathcal{A}$ y $G(\mathcal{A}, 1) = C_{n_K}^X$. Entonces, $C_K^n(X)$ es contráctil. Así, (1) implica (2).

Para mostrar que (2) implica (1). Notemos que para $K = X$, por la Observación 1.2.5, $C_K^n(X)$ es homeomorfo a $C_n(X)$. Como $C_K^n(X)$ es contráctil, $C_n(X)$ es contráctil. Con lo que (2) implica (1). \square

Dado un continuo X , denotamos por $C_\infty(X)$ al conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n(X)$. Por el Teorema 2.4.2, [30, Teorema 3.7, p. 241] y [30, Teorema 8.7, p. 254] concluimos el siguiente resultado.

Teorema 2.4.3. *Sea X un continuo. Dado $n \in \mathbb{N}$, entonces las siguientes son equivalentes.*

- (1) 2^X es contráctil;
- (2) $C_n(X)$ es contráctil;
- (3) $C_\infty(X)$ es contráctil;
- (4) $C(X)$ es contráctil;
- (5) $C_K^n(X)$ es contráctil para cada $K \in 2^X$.

Un continuo X tiene la *propiedad de Kelley* siempre que para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $a, b \in X$, $d(a, b) < \delta$, y $A \in C(X)$ tal que $a \in A$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $b \in B$ y $H_d(A, B) < \epsilon$. Decimos que un continuo X es *suave en un punto* $p \in X$ si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in X$, cada subcontinuo M que contiene a p tal que $x \in M$ y cada $y \in X$ que satisface $d(x, y) < \delta$ existe un subcontinuo L que contiene a p tal que $y \in L$ y $H_d(M, L) < \epsilon$. Un continuo X es *suave* si este es suave en algún punto.

Corolario 2.4.4. *Si $C_n(X)$ es un continuo suave y $K \in 2^X$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_K^n(X)$ es contráctil.*

Demostración. De que $C_n(X)$ es un continuo suave, por [13, Corolario 4.3.1, p. 253], X tiene la propiedad de Kelley. De [30, Corolario 3.8, p. 241], $C_n(X)$ es contráctil. Así, $C_K^n(X)$ es contráctil por el Teorema 2.4.2. \square

Un subconjunto (continuo) cerrado, no vacío y propio L de un continuo X es llamado:

- un R^1 -conjunto (continuo) si existen, un conjunto abierto U que contiene a L y dos sucesiones $\{C_m^i\}_{m=1}^{\infty}$, $i = 1, 2$, de componentes de U tales que $L = \limsup C_m^1 \cap \limsup C_m^2$;
- un R^2 -conjunto (continuo) si existen, un conjunto abierto U que contiene a L y dos sucesiones $\{C_m^i\}_{m=1}^{\infty}$, $i = 1, 2$, de componentes de U tales que $L = \lim C_m^1 \cap \lim C_m^2$;

- un R^3 -conjunto (continuo) si existen, un conjunto abierto U que contiene a L y una sucesión $\{C_m\}_{m=1}^{\infty}$ de componentes de U tal que $L = \liminf C_m$.

Teorema 2.4.5. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si un continuo X contiene un R^i -continuo, $i \in \{1, 2, 3\}$, entonces $C_n(X)$ contiene un R^i -conjunto para $i \in \{1, 2, 3\}$, respectivamente.*

Demostración. Supongamos que L es un R^1 -continuo en X . Por definición, existe U un conjunto abierto de X que contiene a L y hay dos sucesiones $\{C_m^i\}_{m=1}^{\infty}$, $i = 1, 2$, de componentes de U tales que $L = \limsup C_m^1 \cap \limsup C_m^2$. Por el Lema 2.2.5, $\langle C_m^i \rangle_n$ son componentes de $\langle U \rangle_n$. Sea $\mathcal{L} = \limsup \langle C_m^1 \rangle_n \cap \limsup \langle C_m^2 \rangle_n$. Entonces $\{\{x\} : x \in L\} \subset \mathcal{L}$ y \mathcal{L} es cerrado. Sea $A \in \mathcal{L}$, para cada $i = 1, 2$, sea $\{A_{m_j}^i\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} A_{m_j}^i = A$, donde $A_{m_j}^i \in \langle C_{m_j}^i \rangle_n$. Entonces $A \subset L$ y $A \in \langle U \rangle_n$. Así, $\mathcal{L} \subset \langle U \rangle_n$ y es un R^1 -conjunto de $C_n(X)$. La prueba para $i = 2, 3$ es similar. \square

Por [3, Corolario 3.3, p. 317] y el Teorema 2.4.5 concluimos el siguiente resultado.

Corolario 2.4.6. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si un continuo X contiene un R^i -continuo con $i \in \{1, 2, 3\}$, entonces $C_n(X)$ no es contráctil.*

El siguiente resultado se obtiene como consecuencia del Teorema 2.4.2 y el Corolario 2.4.6.

Corolario 2.4.7. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si un continuo X contiene un R^i -continuo con $i \in \{1, 2, 3\}$ y $K \in 2^X$, entonces $C_K^n(X)$ no es contráctil.*

Los siguientes resultados dan otra prueba del Corolario 2.4.7.

Lema 2.4.8. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $K \in 2^X$. Para cada $\epsilon > 0$, $\pi_K^X(N_H(C_{n_K}(X), \epsilon) \cap C_n(X))$ es un subconjunto abierto en $C_K^n(X)$ que contiene a $C_{n_K}^X$.*

Demostración. Como $N_H(C_{n_K}(X), \epsilon) \cap C_n(X)$ es un subconjunto abierto de $C_n(X)$ y π_K^X es una función cerrada. Entonces

$$\begin{aligned} \pi_K^X(C_n(X) - (N_H(C_{n_K}(X), \epsilon) \cap C_n(X))) &= \\ \pi_K^X(C_n(X)) - \pi_K(N_H(C_{n_K}(X), \epsilon) \cap C_n(X)) &= \\ C_K^n(X) - \pi_K(N_H(C_{n_K}(X), \epsilon) \cap C_n(X)) & \end{aligned}$$

es cerrado de $C_K^n(X)$. Así, $\pi_K^X(N_H(C_{n_K}(X), \epsilon) \cap C_n(X))$ es un subconjunto abierto que contiene a $C_{n_K}^X$. \square

Lema 2.4.9. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $K \in 2^X$. Si \mathcal{U} es un subconjunto abierto en $C_n(X)$ tal que $C_{n_K}(X) \subset \mathcal{U}$, entonces $\pi_K^X(\mathcal{U})$ es un subconjunto abierto en $C_K^n(X)$ tal que $C_{n_K}^X \in \pi_K^X(\mathcal{U})$.

Demostración. Dado $\mathcal{A} \in \pi_K^X(\mathcal{U})$, existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $\pi_K^X(A) = \mathcal{A}$. Si $A \notin C_{n_K}(X)$, existe un subconjunto abierto \mathcal{W} de $C_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{W} \subset \mathcal{U} - C_{n_K}(X)$. Por la Proposición 1.2.6, $\pi_K^X(\mathcal{W})$ es un subconjunto abierto en $C_K^n(X)$ tal que $\mathcal{A} \in \pi_K^X(\mathcal{W}) \subset \pi_K^X(\mathcal{U})$.

Si $A \in C_{n_K}(X)$. De que $C_{n_K}(X) \subset \mathcal{U}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $N_H(C_{n_K}(X), \epsilon) \cap C_n(X) \subset \mathcal{U}$, entonces $A \in N_H(C_{n_K}(X), \epsilon) \cap C_n(X)$. Por el Lema 2.4.8,

$$\pi_K^X(N_H(C_{n_K}(X), \epsilon) \cap C_n(X)) \subset \pi_K^X(\mathcal{U})$$

es un conjunto abierto en $C_K^n(X)$. Por lo tanto, $\pi_K^X(\mathcal{U})$ es un subconjunto abierto en $C_K^n(X)$ tal que $C_{n_K}^X \in \pi_K^X(\mathcal{U})$. \square

Teorema 2.4.10. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $K \in 2^X$. Si un continuo X contiene un R^i -continuo, $i \in \{1, 2, 3\}$, entonces $C_K^n(X)$ contiene un R^i -conjunto para $i \in \{1, 2, 3\}$, respectivamente.

Demostración. Sea L un R^1 -continuo de X . Entonces, existen un subconjunto abierto U de X con $L \subset U$ y dos sucesiones $\{C_m^i\}_{m=1}^\infty$ de componentes de U con $i = 1, 2$ tales que $L = \limsup C_m^1 \cap \limsup C_m^2$. Consideremos dos casos.

Caso I. $K \not\subset L$.

Sean $k_1 \in K - L$ y $W = U \cap (X - \{k_1\})$. Notemos que $L \subset W$. Así, existen subsucesiones $\{C_{m_j}^1\}_{j=1}^\infty$ y $\{C_{m_j}^2\}_{j=1}^\infty$ de $\{C_m^1\}_{m=1}^\infty$ y $\{C_m^2\}_{m=1}^\infty$ en W , respectivamente, tales que $L = \limsup C_{m_j}^1 \cap \limsup C_{m_j}^2$. De que $\langle W \rangle_n \cap C_{n_K}(X) = \emptyset$, por la prueba del Teorema 2.4.5, $\mathcal{L} = \limsup \langle C_{m_j}^1 \rangle_n \cap \limsup \langle C_{m_j}^2 \rangle_n$ es un R^1 -conjunto de $\langle W \rangle_n$. Por la Proposición 1.2.6,

$$\pi_K^X(\mathcal{L}) = \limsup \pi_K^X(\langle C_{m_j}^1 \rangle_n) \cap \limsup \pi_K^X(\langle C_{m_j}^2 \rangle_n)$$

es un R^1 -conjunto en $\pi_K^X(\langle W \rangle_n)$.

Caso II. $K \subset L$.

Sea $\epsilon > 0$ tal que $N_d(L, \epsilon) \subset U$. Notemos que $B_\epsilon^H(L) \subset N_H(C_{n_K}(X), \epsilon)$ y $B_\epsilon^H(L) \cap C_n(X) \subset \langle U \rangle_n$. Sea $\mathcal{W} = \langle U \rangle_n \cup (N_H(C_{n_K}(X), \epsilon) \cap C_n(X))$ el

cual es un subconjunto abierto en $C_n(X)$ tal que $C_{n_K}(X) \subset \mathcal{W}$. Por el Lema 2.4.9, $\pi_K^X(\mathcal{W})$ es un subconjunto abierto en $C_K^n(X)$ que contiene a $C_{n_K}^X$. Sea \mathcal{C}_m^i la componente de $\pi_K^X(\mathcal{W})$ que contiene a $\pi_K^X(\langle C_m^i \rangle_n)$ para cada $i = 1, 2$. Entonces, para cada $i = 1, 2$, $\{\mathcal{C}_m^i\}_{m=1}^\infty$ es una sucesión de $\pi_K^X(\mathcal{W})$. Así, $\mathcal{M} = \limsup \mathcal{C}_m^1 \cap \limsup \mathcal{C}_m^2$ es un R^1 -conjunto en $\pi_K^X(\mathcal{W})$. La prueba para $i = 2, 3$ es similar. \square

2.5. Unicoherencia y Homogeneidad

Sea $f : X \rightarrow Y$ un función continua entre continuos, decimos que f es *mónotona*, si $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in Y$, o equivalentemente, si $f^{-1}(B)$ es conexo para cada subcontinuo B de $f(X)$, véase [40, (2.2) Capítulo VIII, p. 138].

Teorema 2.5.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si X es un continuo y $K \in 2^X$, entonces $C_K^n(X)$ es unicoherente.*

Demostración. Por el Teorema 1.2.4, π_K^X es una función cerrada. Notemos que, también π_K^X es mónotona. Así, por [30, Teorema 4.8, p. 244] y [12, Corolario 7, p. 211], tenemos que $C_K^n(X)$ es unicoherente. \square

Teorema 2.5.2. *Si X es un continuo homogéneo, entonces $C_{\{p\}}^n(X)$ es homeomorfo a $C_{\{q\}}^n(X)$ para cada $p, q \in X$.*

Demostración. Consideremos $p, q \in X$ y $h : X \rightarrow X$ un homeomorfismo tal que $h(p) = q$. Por [15, Teorema 46, p. 801], la función inducida $C_n(h) : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ es un homeomorfismo tal que $C_n(h)(\{p\}) = \{q\}$. Además, si $A \in C_{n_{\{p\}}}(X)$, entonces $C_n(h)(A) \in C_{n_{\{q\}}}(X)$. Así, $C_n(h)(C_{n_{\{p\}}}(X)) = C_{n_{\{q\}}}(X)$. Sean π_p^X y π_q^X las funciones cociente a $C_{\{p\}}^n(X)$ y $C_{\{q\}}^n(X)$, respectivamente. De que $g = \pi_q^X \circ C_n(h)$ es una función cociente, entonces $f : C_{\{p\}}^n(X) \rightarrow C_{\{q\}}^n(X)$ es el homeomorfismo que induce la función cociente g . Y el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{C_n(h)} & C_n(X) \\ \pi_p^X \downarrow & & \downarrow \pi_q^X \\ C_{\{p\}}^n(X) & \xrightarrow{f} & C_{\{q\}}^n(X) \end{array}$$

\square

Pregunta 2.5.3. ¿Si X es un continuo homogéneo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_A^n(X)$ es homeomorfo a $C_B^n(X)$ para cada $A, B \in C(X)$ (o 2^X)?

2.6. Aposindesis

En esta sección probaremos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_K^n(X)$ es finitamente aposindético para algún $K \in 2^X$.

Si el espacio topológico Z es conexo. Diremos que un subconjunto S de Z es un *conjunto de corte* si $Z - S$ no es conexo. Un *punto de corte* de Z es un punto $p \in Z$ tal que $\{p\}$ es un conjunto de corte de Z .

Proposición 2.6.1. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $p \in X$. Entonces, p es un punto de corte de X si y sólo si $C_{n\{p\}}(X)$ es un conjunto de corte de $C_n(X)$.

Demostración. Si $p \in X$ es un punto de corte, entonces existen conjuntos abiertos y disjuntos U, V tal que $X - \{p\} = U \cup V$. Dado que $\langle U \rangle_n$ y $\langle X - \{p\}, V \rangle_n$ son conjuntos abiertos disjuntos y no vacíos en $C_n(X)$, es suficiente probar que $C_n(X) - C_{n\{p\}}(X) = \langle U \rangle_n \cup \langle X - \{p\}, V \rangle_n$.

Sea $A \in C_n(X) - C_{n\{p\}}(X)$. Entonces $p \notin A$ y $A \subset X - \{p\} = U \cup V$. Si $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \in \langle X - \{p\}, V \rangle_n$, en otro caso, $A \in \langle U \rangle_n$. Así, $C_n(X) - C_{n\{p\}}(X) \subset \langle U \rangle_n \cup \langle X - \{p\}, V \rangle_n$.

Por otro lado, si $A \in \langle U \rangle_n \cup \langle X - \{p\}, V \rangle_n$, entonces $A \subset U$, o, $A \subset X - \{p\} = U \cup V$ y $A \cap V \neq \emptyset$. Así, $A \subset X - \{p\}$, es decir, $p \notin A$. Entonces $\langle U \rangle_n \cup \langle X - \{p\}, V \rangle_n \subset C_n(X) - C_{n\{p\}}(X)$. Por tanto, $C_{n\{p\}}(X)$ es un conjunto de corte de $C_n(X)$.

Para el inverso, supongamos que $X - \{p\}$ es conexo, entonces $C_n(X) - C_{n\{p\}}(X) = C_n(X - \{p\})$ es conexo. Esto es una contradicción. Por lo tanto, $X - \{p\}$ no es conexo, y así, p es un punto de corte de X . \square

Corolario 2.6.2. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $p \in X$. Entonces p es un punto de corte de X si y sólo si $C_{n\{p\}}^X$ es un punto de corte de $C_{\{p\}}^n(X)$.

Un continuo X se dice ser *colocalmente conexo en* $p \in X$, si p tiene una base local de conjuntos abiertos cuyos complementos son conexos. X será *colocalmente conexo*, si X es colocalmente conexo en cada uno de sus puntos.

Proposición 2.6.3. Si X es colocalmente conexo en $p \in X$, entonces p no es un punto de corte de X .

Demostración. Supongamos que p es un punto de corte de X , entonces existen subconjuntos abiertos no vacíos U y W de X tales que $X - \{p\} = U \cup W$ y $U \cap W = \emptyset$. Sean $u \in U$ y $w \in W$. Sea $\delta = \frac{1}{2} \min\{d(p, u), d(p, w)\} > 0$. Como X es colocalmente conexo en p , existe una base local de subconjuntos abiertos $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ en p donde J es un conjunto de índices. Entonces existe $\alpha \in J$ tal que $p \in V_\alpha \subset B_\delta(p)$. Así, $X - B_\delta(p) \subset X - V_\alpha \subset X - \{p\}$. Como $X - V_\alpha$ es conexo, podemos asumir que $X - V_\alpha \subset U$. Notemos que $u, w \in X - B_\delta(p)$. Entonces, $u, w \in U$ y $w \in U \cap W$. Esto es una contradicción. Por lo tanto, p no es punto de corte de X . \square

Teorema 2.6.4. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si $K \in 2^X$, entonces $C_K^n(X)$ es colocalmente conexo en \mathcal{A} para cada $\mathcal{A} \in C_K^n(X) - \{C_{n_K}^X\}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \in C_K^n(X) - \{C_{n_K}^X\}$ y sea $A \in C_n(X)$ tal que $\pi_K^X(A) = \mathcal{A}$. Notemos que $A \notin C_{n_K}(X)$. Por [30, Teorema 5.1 p. 246], existe una base local de subconjuntos abiertos $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de A cuyos complementos son conexos. Podemos suponer que $V_\alpha \subset C_n(X) - C_{n_K}(X)$ para toda $\alpha \in J$. Por la Proposición 1.2.6, $\{\pi_K^X(V_\alpha)\}$ es una base local de subconjuntos abiertos de \mathcal{A} . Como $\pi_K^X(C_n(X) - V_\alpha) = C_K^n(X) - \pi_K^X(V_\alpha)$ es conexo, $C_K^n(X)$ es colocalmente conexo en \mathcal{A} . \square

Sean $p, q \in X$, $p \neq q$. Decimos que X es *aposindético en p con respecto a q* si existe un continuo M tal que $p \in \text{Int}_X(M)$ y $q \in X - M$. Si para cada $q \in X - \{p\}$, X es aposindético en p con respecto a q , entonces X es *aposindético en p* . Si X es aposindético en cada uno de sus puntos, entonces X es *aposindético*. X es *finitamente aposindético* siempre que para cada subconjunto finito F de X y cada punto $x \in X - F$, existe un subcontinuo W de X tal que $x \in \text{Int}_X(W) \subset W \subset X - F$.

Lema 2.6.5. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si X es un continuo y $K \in 2^X$. Entonces*

- (1) $C_K^n(X)$ es aposindético en $C_{n_K}^X$.
- (2) $C_K^n(X)$ es aposindético en $\mathcal{A} \neq C_{n_K}^X$ con respecto a cualquier $\mathcal{B} \neq C_{n_K}^X$.

Demostración. (1) Sea $\mathcal{A} \in C_K^n(X)$ con $\mathcal{A} \neq C_{n_K}^X$. Como $C_K^n(X)$ es un espacio de Hausdorff, existen subconjuntos abiertos disjuntos \mathfrak{U} y \mathfrak{V} tales que $\mathcal{A} \in \mathfrak{U}$ y $C_{n_K}^X \in \mathfrak{V}$. Sean $A, B \in C_n(X)$ tales que $\pi_K^X(A) = \mathcal{A}$ y $\pi_K^X(B) = C_{n_K}^X$. Entonces $(\pi_K^X)^{-1}(\mathfrak{U})$ es un subconjunto abierto en $C_n(X)$ que contiene a A y $(\pi_K^X)^{-1}(\mathfrak{U}) \cap C_{n_K}(X) = \emptyset$. De que $C_n(X)$ es colocalmente conexo por [30,

Corolario 5.1, p. 246]. Existe un subconjunto abierto \mathcal{U}_A tal que $A \in \mathcal{U}_A \subset (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{U})$ y $C_n(X) - \mathcal{U}_A$ es un continuo. Notemos que $C_{n_K}(X) \subset C_n(X) - \mathcal{U}_A$, así, $C_{n_K}^X \in \mathfrak{V} \subset \pi_K^X(C_n(X) - \mathcal{U}_A)$. Entonces, $C_K^n(X)$ es aposindético en $C_{n_K}^X$. (2) Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in C_K^n(X)$ con $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$. Supongamos que \mathcal{A} y \mathcal{B} son diferentes a $C_{n_K}^X$. Sean $A, B \in C_n(X)$ tales que $\pi_K^X(A) = \mathcal{A}$ y $\pi_K^X(B) = \mathcal{B}$. Como $C_K^n(X)$ es un espacio de Hausdorff, existen abiertos disjuntos \mathcal{U} y \mathfrak{V} que contienen a \mathcal{A} y \mathcal{B} , respectivamente. Así, $(\pi_K^X)^{-1}(\mathfrak{V})$ es un subconjunto abierto que contiene a B . Dado que $C_n(X)$ es colocalmente conexo, existe un subconjunto abierto \mathcal{V}_B tal que $B \in \mathcal{V}_B \subset (\pi_K^X)^{-1}(\mathfrak{V})$ y $\mathcal{W} = C_n(X) - \mathcal{V}_B$ es un continuo. Además, $A \in (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{W}$. Entonces $\pi_K^X(\mathcal{W})$ es un continuo en $C_K^n(X) - \{\mathcal{B}\}$ tal que $\mathcal{A} \in \text{Int}_{C_K^n(X)}(\pi_K^X(\mathcal{W})) \subset \pi_K^X(\mathcal{W})$. \square

Teorema 2.6.6. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_K^n(X)$ es aposindético para cada $K \in 2^X - F_1(X)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \in C_K^n(X)$. Por el Lema 2.6.5, probaremos que $C_K^n(X)$ es aposindético en \mathcal{A} con respecto a $C_{n_K}^X$. Sea $A \in C_n(X)$ tal que $\pi_K^X(A) = \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A} \neq C_{n_K}^X$, $K \not\subset A$ y existe $k_0 \in K - A$. Consideramos $A_0 = \{k_0\}$ y $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$ donde A_i es una componente de A para cada $i = 1, \dots, m$ con $1 \leq m \leq n$. De que X es un espacio métrico, **1)** se satisface:

1) Para cada $i = 0, \dots, m$ existe un subconjunto abierto \mathcal{W}_i de X tal que $A_i \subset \mathcal{W}_i$ y $\text{Cl}_X(\mathcal{W}_i) \cap \text{Cl}_X(\mathcal{W}_j) = \emptyset$ para cada $i, j \in \{0, \dots, m\}$ con $i \neq j$. En consecuencia, se tiene **2)**:

2) $A \in \mathcal{U} = \langle W_1, \dots, W_m \rangle_n$ y $\text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{U}) \cap C_{n_K}(X) = \emptyset$.

3) Si \mathcal{D} es una componente de \mathcal{U} , entonces $\mathcal{D} \cap F_n(X) \neq \emptyset$. Además, $F_n(X) \cap \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{U}) \neq \emptyset$.

Prueba de **3)**, como \mathcal{D} es un subconjunto conexo de $C_n(X)$, por [20, Lema 1, p. 1578], $D_0 = \bigcup \{A : A \in \mathcal{D}\}$ tiene a lo más n componentes, podemos suponer que $D_0 = D_1 \cup \dots \cup D_l$ con $1 \leq l \leq n$. Así, $\{d_1, \dots, d_l\} \in \mathcal{D} \cap F_n(X)$ donde $d_i \in D_i$ para cada $i = 1, \dots, l$. Notemos que D_i es una componente de W_{j_i} para algún $j_i \in \{1, \dots, m\}$.

Por [37, Teorema 5.6, p. 74], para cada $i \in \{1, \dots, l\}$ existe $e_i \in \text{Cl}_X(D_i) \cap \text{Bd}_X(W_{j_i})$. Concluimos **4)**,

4) Existe $\{e_1, \dots, e_l\} \in \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{D})$ tal que para cada $i = 1, \dots, l$ existe $j \in \{1, \dots, m\}$ con $e_i \in \text{Bd}_X(W_j)$.

La prueba de **5)** y **6)**, es consecuencia de **4)** y de la prueba del Teorema 5.2 de [11].

5) Supongamos que $K \in F_n(X)$. Para cada \mathcal{D} existe un subcontinuo $M_{\mathcal{D}}$ de $F_n(X) - F_{n_K}(X)$ tal que $M_{\mathcal{D}} \cap F_1(X) \neq \emptyset$ y $\{e_1, \dots, e_l\} \in M_{\mathcal{D}}$.

6) $M = \text{Cl}_{C_n(X)}(\bigcup\{M_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \text{ es componente de } \mathcal{U}\}) \cup F_1(X)$ es un subcontinuo de $F_n(X) - F_{n_K}(X)$.
 Ahora, si $K \notin F_n(X)$, $F_n(X) \cap C_{n_K}(X) = \emptyset$. Por **2)** y **3)**, $\mathcal{C} = \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{U}) \cup F_n(X)$ es un subcontinuo de $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ tal que $A \in \text{Int}_{C_n(X)}(\mathcal{C})$.
 Por otro lado, por **6)** $\mathcal{C} = \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{U}) \cup M$ es un subcontinuo de $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ tal que $A \in \text{Int}_{C_n(X)}(\mathcal{C})$. Por lo tanto, $C_K^n(X)$ es aposindético en \mathcal{A} con respecto a $C_{n_K}^X$. \square

Por el Teorema 2.5.1, Teorema 2.6.6 y [6, Corolario 1, p. 586] tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.6.7. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si X es un continuo y $K \in 2^X - F_1(X)$, entonces $C_K^n(X)$ es finitamente aposindético.*

Teorema 2.6.8. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces X es aposindético si y sólo si $C_K^n(X)$ es aposindético para cada $K \in F_1(X)$.*

Demostración. Sea $K \in F_1(X)$. Por el Lema 2.6.5, probaremos que $C_K^n(X)$ es aposindético en $\mathcal{A} \in C_K^n(X) - \{C_{n_K}\}$ con respecto a C_{n_K} . Sea $A \in C_n(X)$ tal que $\pi_K(A) = \mathcal{A}$, supongamos que $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$ con $1 \leq m \leq n$ donde $A_i \in C(X)$ para cada $i = 1, \dots, m$. Asumamos que $K = \{x_0\}$ para algún $x_0 \in X$. Como $A \notin C_{n_K}(X)$, $A_i \subset X - \{x_0\}$ para cada $i = 1, \dots, m$. Sea $i \in \{1, \dots, m\}$ y sea $a \in A_i$, como X es aposindético, existe M_a^i un subcontinuo de X tal que $a \in \text{Int}_X(M_a^i) \subset M_a^i \subset X - \{x_0\}$. Entonces, $\mathcal{C}_i = \{\text{Int}(M_a^i) : a \in A_i\}$ es una cubierta abierta de A_i . Como A_i es compacto, existe $l_i \in \mathbb{N}$ tal que $A_i \subset \bigcup_{j=1}^{l_i} \text{Int}_X(M_{a_j}^i)$. Para cada $i = 1, \dots, m$, sea $U_i = \bigcup_{j=1}^{l_i} \text{Int}_X(M_{a_j}^i)$. Notemos que $U_i \subset X - \{x_0\}$ y $A \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle_n$. Así, $\mathcal{W} = \text{Cl}(\langle U_1, \dots, U_m \rangle_n)$ es un subcontinuo de $C_n(X) - C_{n_K}(X)$. Entonces $\pi_K(\mathcal{W})$ es un subcontinuo de $C_K^n(X) - \{C_{n_K}\}$ tal que $\mathcal{A} \in \text{Int}_{C_K^n(X)}(\pi_K(\mathcal{W}))$. Por lo tanto, $C_K^n(X)$ es aposindético en \mathcal{A} .

Para el inverso, sean $p, q \in X$ con $p \neq q$. Podemos suponer que $K = \{q\}$. Como $C_K^n(X)$ es aposindético, existe un continuo \mathfrak{W} en $C_K^n(X)$ tal que $\mathcal{P} = \pi_K(\{p\}) \in \text{Int}_{C_K^n(X)}(\mathfrak{W})$ y $C_{n_K} \in C_K^n(X) - \mathfrak{W}$. Entonces, $\pi_K^{-1}(\mathfrak{W})$ es un continuo en $C_n(X) - C_{n_K}(X)$. Notemos que $\{p\} \in \pi_K^{-1}(\mathfrak{W})$. Por [20, Lema 1, p. 1578], $M = \bigcup \pi_K^{-1}(\mathfrak{W})$ es un continuo en X tal que $p \in \text{Int}_X(M)$. De que $\pi_K^{-1}(\mathfrak{W}) \subset C_n(X) - C_{n_K}(X)$, $q \notin M$. Así, X es aposindético en p para cada $p \in X$. \square

Como una consecuencia del Teorema 2.6.6 y del Teorema 2.6.8 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.6.9. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, X es aposindético si y sólo si $C_K^n(X)$ es aposindético para cada $K \in 2^X$.

Ejemplo. Sea $\Sigma(Z)$ la suspensión sobre Z (véase la definición en la siguiente sección) donde $Z = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Denotamos por v_1, v_{-1} los vértices de $\Sigma(Z)$, $L_0 = \{0\} \times (-1, 1)$ y $p = (0, 0)$. Ahora, Y es obtenido al identificar en $\Sigma(Z)$, v_1, v_{-1} a un punto denotado por v . Notemos que Y es un continuo no aposindético en $x \in L_0$. Dado $n \in \mathbb{N}$, tenemos las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. $C_K^n(Y)$ es aposindético para cada $K = \{p\}$.

Sea $K = \{p\}$. Por el Lema 2.6.5, probaremos que $C_K^n(Y)$ es aposindético en \mathcal{A} con respecto a C_{nK}^Y . Sea $A \in C_n(X)$ tal que $\pi_K(A) = \mathcal{A}$. Notemos que Y es colocalmente conexo en p . Como $\mathcal{A} \neq C_{nK}$, $p \notin A$. Existe un subconjunto abierto U de X tal que $p \in U \subset \text{Cl}_Y(U) \subset Y - A$ y $Y - U$ es un continuo. Así, $\langle Y - U \rangle_n$ es un continuo en $C_n(Y) - C_{nK}(Y)$ tal que $A \in \langle Y - \text{Cl}_Y(U) \rangle_n \subset \langle Y - U \rangle_n$. Por tanto, $C_K^n(Y)$ es aposindético.

Afirmación 2. $C_L^n(Y)$ no es aposindético para $L = \{v\}$.

Sea $L = \{v\}$. Consideremos \mathfrak{W} un continuo tal que $\mathcal{P} \in \text{Int}_{C_L^n(Y)}(\mathfrak{W})$. Supongamos que $C_{nL} \notin \mathfrak{W}$, entonces $\pi_L^{-1}(\mathfrak{W})$ es un continuo en $C_n(Y) - C_{nL}(Y)$. Notemos que $\{p\} \in \pi_L^{-1}(\mathfrak{W})$. Por [20, Lema 1, p. 1578], $M = \bigcup \pi_L^{-1}(\mathfrak{W})$ es un continuo en Y tal que $p \in \text{Int}_Y(M)$. Entonces, $v \in M$, esto es una contradicción. Por lo tanto, $C_L^n(Y)$ no es aposindético.

Por las Afirmaciones 1 y 2, tenemos que Y no es aposindéticos y $C_K^n(Y)$ es aposindético para cada $K = \{p\}$ y $C_L^n(Y)$ no es aposindético para $L = \{v\}$.

2.7. Gráficas Finitas

Un *arco libre* en un continuo X es un arco A en X tal que A sin sus puntos extremos es un conjunto abierto en X .

Una *gráfica finita* X es un continuo el cual puede escribirse como la unión finita de arcos donde cualquier par de arcos son disjuntos o se intersectan en uno o ambos puntos extremos. Si X es una gráfica finita, los arcos y los puntos finales de los arcos son llamados *aristas* y *vértices*, respectivamente. Dado $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, un *m-odo simple* Y es una gráfica finita la cual es la unión de m arcos J_1, \dots, J_m para los que existe un punto $v \in Y$ con la propiedad de que $J_i \cap J_j = \{v\}$, si $i \neq j$, y v es un punto extremo de J_i para cada $i = 1, \dots, m$. Al punto v lo llamamos *corazón de* Y . Un 3-odo simple lo llamaremos *triodo simple*.

El orden de un punto p en una gráfica finita X , lo definimos en el sentido clásico de Menger. Dados $p \in X$ y $m, n \in \mathbb{N}$, el orden de p en X , denotado por $ord_X(p)$, es definido como $ord_X(p) \leq n$, si para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto abierto G que contiene a p con diámetro menor o igual que ϵ tal que $Bd_X(G)$ consiste de a lo más n puntos, se define $ord_X(p) = n$ si, $ord_X(p) \leq n$ y $ord_X(p)$ no es menor o igual a m para cada $m < n$.

A un punto $q \in X$ lo llamamos *punto final de X* si, $ord_X(q) = 1$. Un punto $q \in X$ es llamado un *punto de ramificación de X* si, $ord_X(q) \geq 3$. El conjunto de puntos de ramificación de X lo denotamos por $R(X)$ y el conjunto de puntos finales de X es denotado por $E(X)$. Notemos que en un arco o una curva cerrada simple, el conjunto de puntos de ramificación es vacío. En cualquier otro caso asumimos que cada vértice de X , es un punto final o un punto de ramificación de X . Con esta restricción, los puntos finales de una arista de X pueden coincidir, en este caso la arista es una curva cerrada simple. Este tipo de aristas las llamamos *lazos*. Así, las aristas de X son arcos o curvas cerradas simples, con esto en X sólo hay tres tipos de aristas: lazos, aristas que contienen un punto final de X , y aristas que unen puntos de ramificación. Dos vértices diferentes p y q de X se dicen ser adyacentes si existe un arista J de X tal que p y q son puntos finales de J .

Denotamos la *dimensión del espacio X* por $\dim(X)$; y para cada $p \in X$, la *dimensión del espacio X en el punto p* como $\dim_p(X)$ las cuales se definen como sigue. Primero, definimos $\dim(X) = -1$ cuando $X = \emptyset$. Después, de manera inductiva definimos $\dim_p(X) \leq n - 1$ y $\dim(X) \leq n - 1$ para algún entero $n \geq 0$. Definimos $\dim_p(X) \leq n$ si p tiene vecindades abiertas pequeñas en X cuyas fronteras tienen dimensión menor o igual a $n - 1$, y definimos $\dim(X) \leq n$, si $\dim_p(X) \leq n$ para todo $p \in X$. Si $\dim_p(X) \leq n$ y $\dim_p(X) \not\leq n - 1$, entonces $\dim_p(X) = n$. Si $\dim(X) \leq n$ y $\dim(X) \not\leq n - 1$, $\dim(X) = n$. Finalmente, si $\dim(X) \not\leq n$ para cualquier entero n , entonces $\dim(X) = \infty$.

El siguiente resultado es consecuencia de [30, Teorema 7.1, p. 250].

Corolario 2.7.1. *Sea X un continuo localmente conexo tal que X no es gráfica finita, consideremos $K \in 2^X$. Si $X - \{x\}$ contiene un subcontinuo sin arcos libres para algún $x \in K$, entonces $C_K^n(X)$ contiene un cubo de Hilbert.*

Lema 2.7.2. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si $C_n(X) \approx C_K^n(X)$ para cada $K \in F_1(X)$, entonces X no contiene puntos de corte.*

Demostración. Sea $p \in X$. Como $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_{\{p\}}^n(X)$, por [30, Teorema 5.1, p. 245], $C_{\{p\}}^n(X)$ es colocalmente conexo en cada punto. Así,

por la Proposición 2.6.3, $C_{n\{p\}}^X$ no es un punto de corte de $C_{\{p\}}^n(X)$. Entonces, por el Corolario 2.6.2, p no es un punto de corte de X . \square

El siguiente lema, es consecuencia de [38, Ejercicio 7.4, p. 36].

Lema 2.7.3. *Sean X un continuo, $K \in 2^X$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\dim(C_K^n(X)) = \dim(C_n(X) - C_{nK}(X)).$$

Dados X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$. Sea $x \in X$. Consideremos

$$D_x^n = \{\dim_A(C_n(X)) : A \in \langle X - \{x\} \rangle_n\}.$$

Como X es una gráfica finita, por [29, Teorema 5.1, p. 270], $\dim_A(C_n(X)) < \infty$ para cada $A \in C_n(X)$ y $\emptyset \neq D_x^n \subset \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{O}_x^n = \max D_x^n$. Si $K \in 2^X$, definimos $M_K^n = \max\{\mathcal{O}_x^n : x \in K\}$ y tenemos el siguiente lema.

Lema 2.7.4. *Sean X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$. Si $K \in 2^X$, entonces*

$$\dim(C_K^n(X)) = M_K^n \leq \dim(C_n(X)).$$

Demostración. Sea $A \in C_n(X) - C_{nK}(X)$. Como $K \not\subset A$, existe $x \in K - A$ tal que $A \subset X - \{x\}$. Así, $\dim_A(C_n(X)) \in D_x^n$. Tenemos que $\dim_A(C_n(X)) \leq \mathcal{O}_x^n \leq M_K^n \leq \dim_X(C_n(X))$. Por otro lado, supongamos que $\mathcal{O}_{x_0}^n = \max\{\mathcal{O}_x^n : x \in K\}$, entonces existe $B \in \langle X - \{x_0\} \rangle_n$ tal que $\mathcal{O}_{x_0}^n = \dim_B(C_n(X))$. Dado que $x_0 \in K$, $B \in C_n(X) - C_{nK}(X)$. Entonces $\dim(C_K^n(X)) = M_K^n$, por el Lema 2.7.3. \square

El siguiente corolario es consecuencia de [34, Teorema 2.4, p. 791] y el Lema 2.7.4.

Corolario 2.7.5. *Sean X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Si $K \subset R(X)$, entonces $\dim(C_K^n(X)) < \dim(C_n(X))$.*
2. *Si $K \subset E(X)$, entonces $\dim(C_K^n(X)) = \dim(C_n(X))$.*

El siguiente ejemplo muestra lo que ocurre con la dimensión, cuando $R(X)$ esta contenido en K . Sea X un continuo homeomorfo a la letra H. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que

$$X = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\} \cup \\ \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}.$$

Sea $p = (0, 0)$, $q = (1, 0)$, $r = (\frac{1}{2}, 0)$, $a_1 = (0, -1)$, $a_2 = (1, -1)$, $a_3 = (0, 1)$, $a_4 = (1, 1)$. Notemos que $p, q \in R(X)$ y $a_1, a_2, a_3, a_4 \in E(X)$.

Ejemplo 2.7.6. Si X es homeomorfo a la letra H , entonces

- a) $\dim(C_K^n(X)) < \dim(C_n(X))$ para $K = \{p, q, r\}$ y $n = 1$.
- b) $\dim(C_K^n(X)) = \dim(C_n(X))$ para $K = \{p, q, r\}$ y $n \geq 2$.
- c) $\dim(C_K^n(X)) = \dim(C_n(X))$ para $K = \{p, q, a_1\}$ y $n \geq 1$.

Demostración. Notemos que $D_p^n = D_q^n = \{2n, 2n + 1\}$ y $D_{a_1}^n = \{2n, 2n + 1, 2n + 2\}$ para cada $n \geq 1$.

$$D_r^n = \begin{cases} \{3\} & \text{si } n = 1, \\ \{2n, 2n + 1, 2n + 2\} & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Así, $\mathcal{O}_p^n = \mathcal{O}_q^n = 2n + 1$ y $\mathcal{O}_{a_1}^n = 2n + 2$ para $n \geq 1$, y $\mathcal{O}_r^n = 3$, $\mathcal{O}_r^n = 2n + 2$ para $n = 1$ y $n \geq 2$, respectivamente. También

$$M_{\{p,q,r\}}^n = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 1, \\ 2n + 2 & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

y $M_{\{p,q,a_1\}}^n = 2n + 2$ para $n \geq 1$. Por tanto, si $K = \{p, q, r\}$, entonces $\dim(C_K^1(X)) = 3 < \dim(C(X))$ y $\dim(C_K^n(X)) = 2n + 2 = \dim(C_n(X))$ para cada $n \geq 2$. Y, si $K = \{p, q, a_1\}$, entonces $\dim(C_K^n(X)) = 2n + 2 = \dim(C_n(X))$ para cada $n \geq 1$. \square

Dado un continuo X , denotamos por $Cut(X)$ el conjunto de puntos de corte de X . En lo siguiente, denotamos por $F_1(Cut(X))$ el conjunto de subconjuntos de $Cut(X)$ con solo un punto, en el mismo sentido denotamos $F_1(E(X))$.

Teorema 2.7.7. Sean X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$. Si $C_K^n(X) \approx C_n(X)$ para cada $K \in 2^X - F_1(Cut(X))$, entonces $|R(X)| \leq 1$.

Demostración. Supongamos que $|R(X)| > 1$. Como X es un gráfica finita, tenemos que $R(X)$ es finito. Así, por (1) del Corolario 2.7.5, $\dim(C_K^n(X)) < \dim(C_n(X))$ para $K = R(X)$. Esto es una contradicción. \square

Sea Y un m -odo simple con aristas J_1, \dots, J_m y corazón v .

Notemos que $C(Y) = C_{\{v\}}(Y) \cup \left(\bigcup_{i=1}^m C(J_i) \right)$, más aún, para cada $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $C(J_i) \cap C(J_j) = \{\{v\}\}$ con $i \neq j$, $C_{\{v\}}(Y) \cap C(J_i) = C_{\{v\}}(J_i)$, y

$$C_{\{v\}}(Y) \cap \left(\bigcap_{i=1}^m C(J_i) \right) = \{\{v\}\}.$$

Un *árbol* es una gráfica finita sin curvas cerradas simples.

Corolario 2.7.8. *Sean X un árbol y $n \in \mathbb{N}$. Si $C_K^n(X) \approx C_n(X)$ para cada $K \in 2^X - F_1(\text{Cut}(X))$, entonces X es un arco o un m -odo simple.*

Demostración. Por el Teorema 2.7.7, $|R(X)| \leq 1$. Si X tiene un punto de ramificación, entonces X es un m -odo simple para algún $m \in \mathbb{N}$. Por otro lado, si $\text{ord}_X(p) \leq 2$ para cada $p \in X$, como X es un árbol, por [37, Proposición 9.5, p. 142] X es un arco. \square

Dado un espacio topológico Y , el *cono sobre Y* , denotado por $\text{Cono}(Y)$, es el espacio cociente $Y \times [0, 1]/Y \times \{1\}$ obtenido de $Y \times [0, 1]$ al identificar $Y \times \{1\}$ a un punto. El punto $Y \times \{1\}$ del $\text{Cono}(Y)$ es llamado el *vértice del Cono*(Y); el subconjunto $Y \times \{0\}$ del $\text{Cono}(Y)$ es llamado la *base del Cono*(Y). Denotamos por v_Y y $B(Y)$ el vértice y la base del $\text{Cono}(Y)$, respectivamente. La *suspensión sobre Y* , denotada por $\Sigma(Y)$, es el espacio cociente obtenido de $Y \times [-1, 1]$ al identificar $Y \times \{-1\}$ y $Y \times \{1\}$ a puntos (diferentes) los cuales son llamados *vértices de $\Sigma(Y)$* . Denotamos por v_{-1} y v_1 los vértices de $\Sigma(Y)$.

Como consecuencia de la prueba de [2, Teorema 5.5, p. 356] tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.7.9. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $X = \text{Cono}(Y)$ para algún espacio métrico compacto Y . Entonces $C_n(X)$ es homeomorfo a $\text{Cono}(Z)$ donde $Z = \bigcup_{p \in B(Y)} C_{n_{\{p\}}}(X)$.*

Teorema 2.7.10. *Supongamos que X es un arco o un m -odo simple. Si $K \in F_1(E(X))$, entonces $C_K^1(X)$ es homeomorfo a $C(X)$.*

Demostración. Supongamos que $X = I$, por [24, Ejercicio 14.24, p. 118], $C_K(X)$ es un arco. Con lo que $C(X) - C_K(X)$ es homeomorfo a $[0, 1] \times [0, 1)$. Así, $C_K^1(X)$ es homeomorfo a $C(X)$.

Ahora, supongamos que X es un m -odo simple para algún $m \in \mathbb{N}$ con aristas J_1, \dots, J_m . Asumamos que $K = \{e\}$ donde $e \in J_1$, notemos que $C_K(X) =$

$C_{\{e\}}(J_1) \cup C_{J_1}(X)$ y $C_{\{e\}}(J_1) \cap C_{J_1}(X) = \{J_1\}$. Por la Proposición 2.7.9, $C(X)$ es homeomorfo al $\text{Cono}(Z)$ donde

$$Z = \bigcup_{p \in E(X)} C_{\{p\}}(X).$$

Por otro lado, de [24, Ejercicio 14.24, p. 118] tenemos que $C_{\{e\}}(J_1)$ es un arco en $C(J_1)$. $C_{\{v\}}(X)$ es una m -celda, véase [28, Teorema 3 and Teorema 4, p. 3071], donde v es el corazón de X , y por [16, 5.2, p. 271], $C_{J_1}(X)$ es una $(m-1)$ -celda en $C_{\{v\}}(X)$. Notemos que $C_{J_1}(X) \cap C(J_i) = \emptyset$ para cada $i \neq 1$. Como $C(J_1)/C_{\{e\}}(J_1)$ es homeomorfo a $C(J_1)$, y $C_{\{v\}}(X)/C_{J_1}(X)$ es homeomorfo a $C_{\{v\}}(X)$. Entonces $C_K^1(X)$ es homeomorfo a $C(X)$. \square

Como una consecuencia de la Proposición 2.7.9, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.7.11. *Sea $n \in \mathbb{N}$. $C_K^n(I)$ es homeomorfo a $\Sigma(C_{n_K}(I))$ para $K \in \{\{0\}, \{1\}\}$.*

Demostración. Solo probaremos para $K = \{0\}$. Como $I \approx \text{Cono}(\{0\})$, por la Proposición 2.7.9, existe un homeomorfismo $h : C_n(I) \rightarrow \text{Cono}(Z)$ donde $Z = C_{n_K}(I)$. Notemos que $\pi_K^I : C_n(I) \rightarrow C_K^n(I)$ y $q : \text{Cono}(Z) \rightarrow \text{Cono}(Z)/B(Z)$ son funciones cocientes. De que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C_n(I) & \xrightarrow{h} & \text{Cono}(Z) \\ \pi_K^I \downarrow & & \downarrow q \\ C_K^n(I) & \longrightarrow & \text{Cono}(Z)/B(Z) \approx \Sigma(Z) \end{array}$$

Por el Lema de la Transgresión, véase [37, Ejercicio 3.22, p. 45], $C_K^n(I)$ es homeomorfo a $\Sigma(C_{n_K}(I))$. \square

Teorema 2.7.12. *Sean X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$. Si para cada $K \in 2^X$, $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_K^n(X)$, entonces X es una curva cerrada simple.*

Demostración. Como $C_n(X) \approx C_K^n(X)$, por el Teorema 2.7.7, $|R(X)| \leq 1$ y por el Lema 2.7.2 X no contiene puntos de corte. Supongamos que $R(X) = \{p\}$. Como p es el único punto de ramificación de X , p es un punto de corte de X . Esto es una contradicción. Así, $R(X) = \emptyset$.

Como X es una gráfica finita y $\text{ord}_X(x) \leq 2$ para cada $x \in X$, entonces por [37, Proposición 9.5, p. 142] X es un arco o una curva cerrada simple. Pero X no contiene puntos de corte, entonces X no es un arco. Por lo tanto, X es una curva cerrada simple. \square

Finalizamos es capítulo con la siguiente caracterización en la clase de las gráficas finitas y $n = 1$.

Teorema 2.7.13. *Si X es una gráfica finita, $C_K^1(X)$ es homeomorfo al $\text{Cono}(X)$ si y sólo si*

1. $X = I$ y $K \in 2^X - F_1((0, 1))$, o,
2. $X = S^1$ y $K \in 2^X$.

Demostración. Supongamos que $h : \text{Cono}(X) \rightarrow C_K^1(X)$ es un homeomorfismo. Como X es una gráfica finita, $\dim(\text{Cono}(X)) = 2$. Así, $\dim(C_K^1(X)) = 2$. Notemos que para cada $y \in \text{Cono}(X)$, y no es un punto de corte. Entonces $h(y)$ no es un punto de corte de $C_K^1(X)$, en particular C_K^X no es un punto de corte de $C_K^1(X)$.

Supongamos que $K = \{z\}$ para algún $z \in X$, de que C_K^X no es un punto de corte de $C_K^1(X)$. Por el Corolario 2.6.2, z no es un punto de corte de X . Entonces z es un punto final o z pertenece a una curva cerrada simple en X . Por otro lado, supongamos que $K \in 2^X$ tal que $|K| \geq 2$. Sea $C \in C(X)$ tal que $K \subset C$. Asumamos que $X - C$ o C tiene un punto de ramificación, p . Si $p \in X - C$, dado que X es una gráfica finita, existe $C_p \in C(X)$ tal que $p \in C_p \subset X - C$ y $\dim_{C_p}(C(X)) \geq 3$. Más aún, $C_p \notin C_K(X)$, así $h^{-1}(C_p) \in \text{Cono}(X)$ esto es una contradicción por que $\dim(\text{Cono}(X)) = 2$.

Ahora, si $p \in C$, existe $q \in K$ tal que $p \neq q$. Como X es un espacio métrico existen U y V conjuntos abiertos y disjuntos tales que $p \in U$ y $q \in V$. Por conexidad local, existe $C_p \in C(X)$ tal que $p \in C_p \subset U$. Notemos que $K \not\subset C_p$, así $C_p \notin C_K(X)$ y $\dim_{C_p}(C(X)) \geq 3$. Esto es una contradicción. Entonces X no contiene puntos de ramificación.

Por ambos casos y [24, Proposición 9.5, p. 142], tenemos que X es un arco I o S^1 .

Para el inverso, sea $X = I$ y $K \in 2^X - F_1((0, 1))$, supongamos que $K = \{0\}$ o $K = \{1\}$. Por [24, Ejercicio 14.24, p. 118], $C_K(X)$ es un arco y $C(X) - C_K(X)$ es homeomorfo a $[0, 1] \times [0, 1)$. Así, $C_K^1(X)$ es homeomorfo a $\text{Cono}(X)$. Si $K \in 2^X - F_1(X)$, sean $a = \min K$ y $b = \max K$, notemos que $a \neq b$. Primero, asumamos que $a = 0$ o $b = 1$. Notemos que $C_K(X)$ es un arco por [24, Ejercicio 14.24, p. 118], entonces $C_K^1(X)$ es homeomorfo al $\text{Cono}(X)$. Ahora, asumamos que $a \neq 0$ y $b \neq 1$. Entonces $C(X) - C_K(X) = C([0, b]) \cup C((a, 1])$ el cual es homeomorfo a $[0, 1] \times [0, 1)$. Así, $C_K^1(X)$ es homeomorfo al $\text{Cono}(X)$. Finalmente, sea $X = S^1$ y $K \in 2^X$. Si $K \in F_1(X)$, por [21, Ejemplo 3.2, p. 31]

$C_K(X)$ es homeomorfo a una 2-celda en $C(X)$. Así, $C_K^1(X)$ es homeomorfo a una 2-celda la cual es homeomorfo al $\text{Cono}(X)$. En otro caso, por el Teorema 2.4.1, $C_K(X)$ es contráctil en $C(X)$ tal que $C_K(X) \cap F_1(X) = \emptyset$. Entonces $C(X) - C_K(X)$ es homeomorfo a $S^1 \times [0, 1)$. Así, $C_K^1(X)$ es homeomorfo al $\text{Cono}(X)$. \square

Capítulo 3

Funciones Inducidas

En este capítulo, retomamos la definición de función inducida dada en el Capítulo 1. Se presentan las relaciones que hay entre la función base $f : X \rightarrow Y$, la inducida en el n -ésimo hiperespacio $C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ y la inducida en el hiperespacio cociente, definido en la Sección 1.2, para diferentes clases de funciones.

3.1. Resultados Generales

En esta sección presentamos definiciones de las diferentes clases de funciones así como resultados que sustentan la demostración de los resultados principales que se encuentran a lo largo del capítulo.

Dados X un continuo y L un subcontinuo de X . Recordemos que X/L es el espacio cociente obtenido al identificar L a un punto. Por el Corolario 1.1.7, X/L es un continuo. Sean X, Y continuos, L un subcontinuo de X , y $f : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva. Consideremos los espacios cociente X/L y $Y/f(L)$. Sean $q_X : X \rightarrow X/L$ y $q_Y : Y \rightarrow Y/f(L)$ las funciones cociente, respectivas. Denotamos a $q_X(L)$ y $q_Y(f(L))$, por L_X y L_Y , respectivamente. Por [17, Teorema 7.7, p. 17], f induce una función $\tilde{f} : X/L \rightarrow Y/f(L)$ dada por

$$\tilde{f}(\mathcal{A}) = \begin{cases} q_Y(f((q_X)^{-1}(\mathcal{A}))) & \text{si } \mathcal{A} \neq L_X; \\ L_Y & \text{si } \mathcal{A} = L_X. \end{cases}$$

De [17, Teorema 4.3, p. 126], \tilde{f} es una función continua. Observemos que el

siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ q_X \downarrow & & \downarrow q_Y \\ X/L & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y/f(L) \end{array}$$

Dados X y Y dos continuos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Consideramos la función inducida $C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ la cual es continua (véase Observación 1.1.14).

Proposición 3.1.1. *Sean $f : X \rightarrow Y$ una función entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si $K \in 2^X$, entonces $C_n(f)$ induce una función continua $g : C_K^n(X) \rightarrow C_{f(K)}^n(Y)$.*

Demostración. Dado que f es cerrada, $f(K) \in 2^Y$. Así, por el Teorema 1.2.4, $C_K^n(X)$, $C_{f(K)}^n(Y)$ son continuos y las funciones cociente $\pi_K^X : C_n(X) \rightarrow C_K^n(X)$, $\pi_{f(K)}^Y : C_n(Y) \rightarrow C_{f(K)}^n(Y)$ son continuas y cerradas. Ahora, notemos que $C_n(f)(C_{n_K}(X)) \subset C_{n_{f(K)}}(Y)$. Por [17, Teorema 7.7, p. 17] y [17, Teorema 4.3, p. 126], $C_n(f)$ induce una función continua $g : C_K^n(X) \rightarrow C_{f(K)}^n(Y)$ dada por

$$g(\mathcal{A}) = \begin{cases} \pi_{f(K)}^Y(C_n(f)((\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{A}))) & \text{si } \mathcal{A} \neq C_{n_K}^X; \\ C_{n_{f(K)}}^Y & \text{si } \mathcal{A} = C_{n_K}^X. \end{cases}$$

□

Notación. La función g de la Proposición 3.1.1 la denotamos por $C_K^n(f)$.

Observación 3.1.2. *El siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{C_n(f)} & C_n(Y) \\ \pi_K^X \downarrow & & \downarrow \pi_{f(K)}^Y \\ C_K^n(X) & \xrightarrow{C_K^n(f)} & C_{f(K)}^n(Y) \end{array}$$

$$\text{y } C_K^n(f) \circ \pi_K^X = \pi_{f(K)}^Y \circ C_n(f).$$

Dada \mathbb{M} una clase de funciones entre continuos, en este capítulo establecemos las relaciones que hay entre las siguientes afirmaciones:

- (1) $f \in \mathbb{M}$;
- (2) $C_n(f) \in \mathbb{M}$;
- (3) $C_K^n(f) \in \mathbb{M}$ para cada $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f) \in \mathbb{M}$ para algún $K \in 2^X$.

Las clases de funciones que se consideran son: abiertas, monótonas, casi monótonas, quasi-monótonas, débilmente monótonas, OM, confluentes, semi-confluentes, débilmente confluentes, pseudo-confluentes, unión, atriódicas, ligeras, fuertemente libremente descomponibles.

Observación 3.1.3. *Para cada clase de funciones \mathbb{M} , de las antes mencionadas. Si $C_K^n(f) \in \mathbb{M}$ para cada $K \in 2^X$, entonces $C_K^n(f) \in \mathbb{M}$ para algún $K \in 2^X$.*

Definiciones

Una función suprayectiva $f : X \rightarrow Y$ entre continuos es:

- *abierta* si $f(U)$ es abierto en Y para cada subconjunto abierto U de X ;
- *semi-abierta* si para cada subconjunto abierto U de X , $\text{Int}_Y(f(U)) \neq \emptyset$;
- *monótona* si $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in Y$;
- *casi monótona* si para cada subcontinuo Q de Y con interior no vacío, $f^{-1}(Q)$ es conexo;
- *quasi-monótona* si para cada subcontinuo B de Y con $\text{Int}_Y(B) \neq \emptyset$, $f^{-1}(B)$ tiene solo una cantidad finita de componentes Q_1, \dots, Q_m y $f(Q_i) = B$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$;
- *débilmente monótona* si para cada subcontinuo B de Y con $\text{Int}_Y(B) \neq \emptyset$, cada componente Q de $f^{-1}(B)$ satisface que $f(Q) = B$;
- *OM* si existen un continuo Z y funciones $g : X \rightarrow Z$ y $h : Z \rightarrow Y$ tales que $f = h \circ g$, g es monótona y h es abierta;
- *confluente* si para cada subcontinuo Q de Y y cada componente M de $f^{-1}(Q)$, $f(M) = Q$;

- *semi-confluente* si para cada subcontinuo B de Y y cada par de componentes C y D de $f^{-1}(B)$, se tiene que $f(C) \subset f(D)$ o $f(D) \subset f(C)$;
- *débilmente confluente* si para cada subcontinuo K de Y , existe un subcontinuo M de X tal que $f(M) = K$;
- *pseudo-confluente* siempre que para cada subcontinuo irreducible B de Y , existe una componente C de $f^{-1}(B)$ tal que $f(C) = B$;
- *unión* si para cada subcontinuo Q de Y y cada par de componentes C y D de $f^{-1}(Q)$, tenemos que $f(C) \cap f(D) \neq \emptyset$;
- *atriódica* si para cada subcontinuo Q de Y , existen dos componentes C y D de $f^{-1}(Q)$ tales que $f(C) \cup f(D) = Q$ y para cada componente E de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(E) = Q$, o $f(E) \subset f(C)$ o $f(E) \subset f(D)$;
- *ligera* si $f^{-1}(y)$ es totalmente desconexo para cada $y \in Y$;
- *libremente descomponible* si cuando A y B son subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$, existen A' y B' dos subcontinuos propios de X tales que $X = A' \cup B'$, $f(A') \subset A$ y $f(B') \subset B$;
- *fuerte libremente descomponible* si cuando A y B son subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$, obtenemos que $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conexos.

En el Diagrama 3.1 se muestran las relaciones entre las funciones antes mencionadas.

Proposición 3.1.4. *Sean X y Y continuos, y sea K un compacto de X . Si $f : X \rightarrow Y$ es una función suprayectiva, entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

- (1) *las funciones π_K^X y $\pi_{f(K)}^Y$ son monótonas;*
- (2) *La función $\pi_{f(K)}^Y|_{C_n(Y) - C_{n_{f(K)}}(Y)} : C_n(Y) - C_{n_{f(K)}}(Y) \rightarrow C_{f(K)}^n(Y) - \{C_{n_{f(K)}}^Y\}$ es un homeomorfismo;*
- (3) *Si $C_{n_K}(X)$ y $C_{n_{f(K)}}(Y)$ son densos en ninguna parte en $C_n(X)$ y $C_n(Y)$, respectivamente, entonces π_K^X y $\pi_{f(K)}^Y$ son funciones semi-abiertas.*

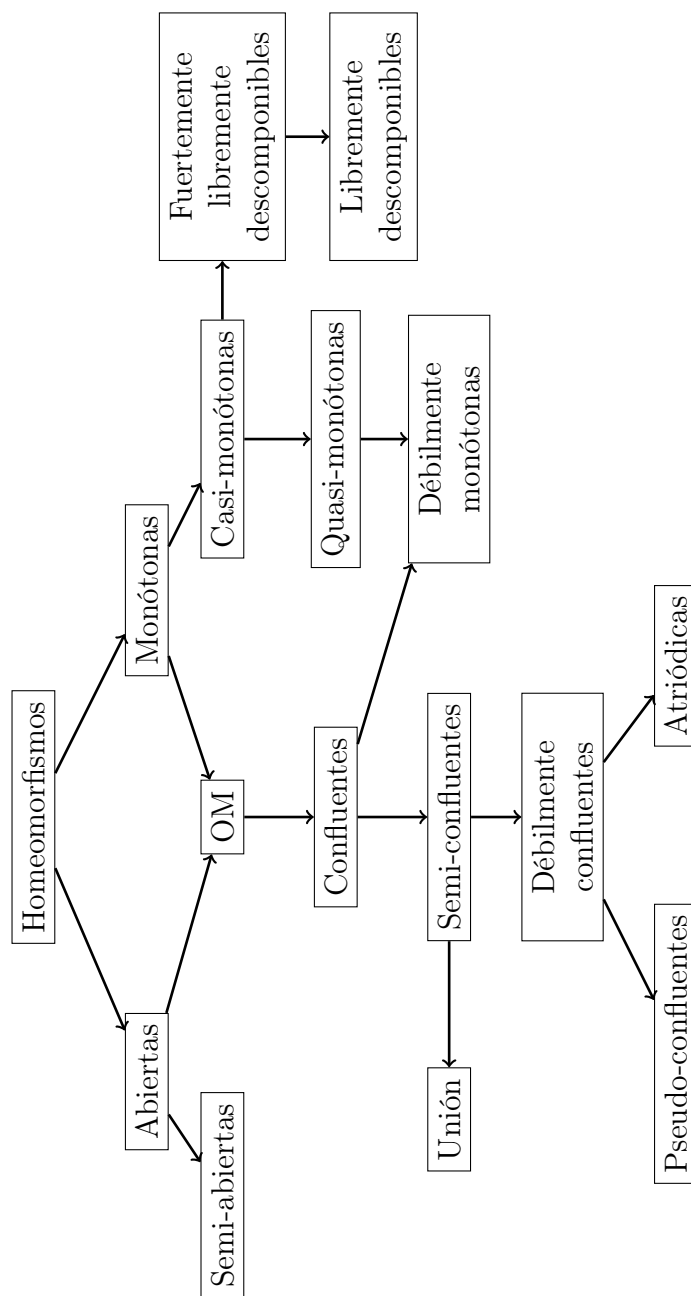


Diagrama 3.1: Clases de Funciones.

Demostración. Notemos que (1) y (2) se siguen de las definiciones de π_K^X y $\pi_{f(K)}^Y$. Probaremos (3), sea \mathcal{U} subconjunto abierto de $C_n(X)$. Como $C_{n_K}(X)$ es denso en ninguna parte en $C_n(X)$, entonces existe $A \in (C_n(X) - C_{n_K}(X)) \cap \mathcal{U}$. Sea \mathcal{W} un subconjunto abierto de $C_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{W} \subset C_n(X) - C_{n_K}(X)$. Por la Proposición 1.2.6, $\pi_K^X(\mathcal{W})$ es un conjunto abierto de $C_K^n(X)$ contenido en $\pi_K^X(\mathcal{U})$. Por lo que $\text{Int}_{C_K^n(X)}(\pi_K^X(\mathcal{U})) \neq \emptyset$. Por lo tanto, π_K^X es semi-abierta. La prueba de que $\pi_{f(K)}^X$ es semi-abierta es similar. \square

Teorema 3.1.5. *Sean $f : X \rightarrow Y$ una función entre continuos y L un subcontinuo de X . Sea \mathbb{A} alguna de las siguientes clases de funciones entre continuos: monótonas, OM, confluentes, semi-confluentes, débilmente confluentes, pseudo-confluentes, quasi-monótonas, débilmente monótonas, unión, casi monótonas, atriódicas, libremente descomponible o fuertemente libremente descomponible. Si $f \in \mathbb{A}$, entonces $\tilde{f} \in \mathbb{A}$.*

Demostración. Por [5, Teorema 3.2, p. 493] tenemos que, si f es casi monótona, atriódica, libremente descomponible o fuertemente libremente descomponible, entonces \tilde{f} es casi monótona, atriódica, libremente descomponible o fuertemente libremente descomponible, respectivamente. Sea \mathbb{A} una clase de funciones faltantes del enunciado. Tenemos que $q_Y \circ f = \tilde{f} \circ q_X$. Como q_Y es monótona, $q_Y \in \mathbb{A}$. Por [26, (5.1), (5.4), (5.5), (5.6), p. 29], y las Proposiciones 4.1, 4.3 y 4.4 de [7], $q_Y \circ f \in \mathbb{A}$. Ahora, por [26, (5.15), (5.16), (5.19), (5.20) y (5.21), p. 32-33], \mathbb{A} tiene la propiedad de factor composición. Y dado que $q_Y \circ f = \tilde{f} \circ q_X$, $\tilde{f} \circ q_X \in \mathbb{A}$. Por tanto, $\tilde{f} \in \mathbb{A}$. \square

Proposición 3.1.6. *Sean $f : X \rightarrow Y$ una función entre continuos y L un subcontinuo de X .*

- (1) *Si \tilde{f} es confluyente, entonces para cada subcontinuo $B \subset Y - f(L)$ y cada componente A de $f^{-1}(B)$, $f(A) = B$.*
- (2) *Si \tilde{f} es débilmente confluyente, entonces para cada subcontinuo $B \subset Y - f(L)$, existe un subcontinuo A de X tal que $f(A) = B$.*
- (3) *Si \tilde{f} es quasi-monótona (débilmente monótona), entonces para cada subcontinuo $B \subset Y - f(L)$ con $\text{Int}_Y(B) \neq \emptyset$ y cada componente A de $f^{-1}(B)$, $f(A) = B$.*

Demostración. Como $q_X|_{X-L}$ y $q_Y|_{Y-f(L)}$ son homeomorfismos y

$$f|_{f^{-1}(Y-f(L))} = q_Y^{-1}|_{Y-f(L)} \circ \tilde{f} \circ q_X.$$

Concluimos (1), (2) y (3). \square

Proposición 3.1.7. Sean $f : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva entre continuos y $r \in \mathbb{N}$, tal que $r \leq n$. Sean L_1, \dots, L_r subconjuntos cerrados disjuntos y no vacíos de Y . Para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, sea M_i una componente de $f^{-1}(L_i)$. Entonces

- (1) $\langle M_1, \dots, M_r \rangle_n$ es una componente de $C_n(f)^{-1}(\langle L_1, \dots, L_r \rangle_n)$.
- (2) Si M es una componente de $f^{-1}(L_i)$ tal que $M \neq M_i$ y $r < n$, entonces $\langle M_1, \dots, M_r, M \rangle_n$ es una componente de $C_n(f)^{-1}(\langle L_1, \dots, L_r \rangle_n)$.
- (3) Si $L_i \notin C_{f(K)}^n(Y)$ tal que $f(K) \not\subset \bigcup_{i=1}^r L_i$, entonces $\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_r \rangle_n)$ es una componente de $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\langle L_1, \dots, L_r \rangle_n))$.

Demostración. Para la prueba de (1) y (2), véase [1, Proposición 2.4, p. 478]. Probaremos (3), sea \mathfrak{D} la componente de $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\langle L_1, \dots, L_r \rangle_n))$ que contiene a $\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_r \rangle_n)$. Notemos que $\langle M_1, \dots, M_r \rangle_n \subset (\pi_K^X)^{-1}(\mathfrak{D})$. Dado que $f(K) \not\subset \bigcup_{i=1}^r L_i$, tenemos que $\langle L_1, \dots, L_r \rangle_n \cap C_{n_{f(K)}}(Y) = \emptyset$. Por lo que $\pi_{f(K)}^Y(C_{n_{f(K)}}(Y)) \not\subset \pi_{f(K)}^Y(\langle L_1, \dots, L_r \rangle_n)$. Así, $\pi_K^X(C_{n_K}(X)) \not\subset \mathfrak{D}$ y $C_{n_K}(X) \cap (\pi_K^X)^{-1}(\mathfrak{D}) = \emptyset$. Además, por la Observación 3.1.2 tenemos que $(\pi_K^X)^{-1}(\mathfrak{D}) \subset C_n(f)^{-1}(\langle L_1, \dots, L_r \rangle_n)$. Por (1) de esta proposición y (1) de la Proposición 3.1.4, $(\pi_K^X)^{-1}(\mathfrak{D}) \subset \langle M_1, \dots, M_r \rangle_n$. Por tanto, $\mathfrak{D} = \pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_r \rangle_n)$. \square

El siguiente resultado se sigue de que $C_{n_K}(X) = \{X\}$, si $K = X$.

Proposición 3.1.8. Sea \mathcal{H} un subconjunto conexo con más de un punto de $C_n(X)$. Si $X \in \mathcal{H}$, entonces existe $K \in 2^X$ tal que $C_{n_K}(X) \subset \mathcal{H}$.

Lema 3.1.9. Sean $f : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva entre continuos, $1 \leq n$ y \mathcal{Q} un subconjunto cerrado de $C_n(Y)$.

- (1) Si $X \notin C_n(f)^{-1}(\mathcal{Q})$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para cada $K \in B_{\frac{1}{m}}^H(X)$, $C_{n_K}(X) \cap C_n(f)^{-1}(\mathcal{Q}) = \emptyset$.
- (2) Si $X \in C_n(f)^{-1}(\mathcal{Q})$, existe $K \in 2^X$ tal que $C_{n_K}(X) \subset C_n(f)^{-1}(\mathcal{Q})$.

Demostración. Supongamos que para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $K_m \in B_{\frac{1}{m}}^H(X)$ tal que $C_{n_{K_m}}(X) \cap C_n(f)^{-1}(\mathcal{Q}) \neq \emptyset$. Entonces $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de $C_n(X)$. Podemos suponer que $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a X . Sea $L_m \in C_{n_{K_m}}(X) \cap C_n(f)^{-1}(\mathcal{Q})$ para cada $m \in \mathbb{N}$, notemos que $\{L_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C_n(f)^{-1}(\mathcal{Q})$ es

una sucesión tal que $K_m \subset L_m$. Así, $\{L_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a X . Entonces, $X \in C_n(f)^{-1}(\mathcal{Q})$ lo cual es una contradicción.

Probaremos (2), sea \mathcal{H} una componente de $C_n(f)^{-1}(\mathcal{Q})$ tal que $X \in \mathcal{H}$. Si \mathcal{H} es degenerado, entonces (2) se cumple tomando $K = X$. En otro caso, por la Proposición 3.1.8, concluimos (2). \square

Lema 3.1.10. Sean $K \in 2^X$, $f : X \rightarrow Y$ una función entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si $f(K) \in F_1(Y)$, entonces

$$C_K^n(f)^{-1}(C_{n_{f(K)}}^Y) = \pi_K^X \left(\bigcup_{p \in f^{-1}(f(K))} C_{n_{\{p\}}}^X \right).$$

Demostración. Sea $\mathcal{A} \in \pi_K^X \left(\bigcup_{p \in f^{-1}(f(K))} C_{n_{\{p\}}}^X \right)$, existen $p \in f^{-1}(f(K))$ y $B \in C_{n_{\{p\}}}^X(X)$ tales que $\pi_K^X(B) = \mathcal{A}$. Entonces, $f(p) \in f(B)$ y $C_K^n(f)(\mathcal{A}) = C_K^n(f)(\pi_K^X(B)) = \pi_{f(K)}^Y(C_n(f)(B))$. Así, $\pi_{f(K)}^Y(C_n(f)(B)) = C_{n_{f(K)}}^Y$, es decir, $\mathcal{A} \in C_K^n(f)^{-1}(C_{n_{f(K)}}^Y)$. Notemos que la otra contención es evidente. \square

Proposición 3.1.11. Sean $K \in 2^X$, $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Entonces $C_K^n(f)^{-1}(C_{n_{f(K)}}^Y)$ es conexo.

Demostración. Supongamos que $C_K^n(f)^{-1}(C_{n_{f(K)}}^Y)$ no es conexo. Sean \mathcal{H} y \mathcal{L} componentes diferentes de $C_K^n(f)^{-1}(C_{n_{f(K)}}^Y)$. Podemos asumir que $C_{n_K}^X \in \mathcal{H}$. Por (1) de la Proposición 3.1.4, $(\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{H})$ y $(\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{L})$ son subconjuntos conexos y disjuntos de $C_n(X)$ tales que $C_{n_K}(X) \subset (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{H})$. Ahora, sea $L \in (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{L})$. Notemos que $C_K^n(f)(\pi_K^X(L)) = C_{n_{f(K)}}^Y$, y para cada arco ordenado $\alpha : I \rightarrow C_n(X)$ de L a X , $C_K^n(f)(\pi_K^X(\alpha(I))) = \{C_{n_{f(K)}}^Y\}$. Entonces, $X \in (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{H}) \cap (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{L})$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $C_K^n(f)^{-1}(C_{n_{f(K)}}^Y)$ es conexo. \square

A continuación, mostramos dos ejemplos que serán importantes, en la mayoría de las clases de funciones.

Ejemplo 3.1.12. Sean $J = [-1, 1]$ y una función $f : J \rightarrow I$ definida por $f(t) = |t|$. Entonces, f es abierta y ligera. Si $K = \{0\}$, entonces $C_K^n(f)$ es abierta y $C_n(f)$ no es una función abierta. Si $K = \{1\}$, entonces $C_K^n(f)$ no es ligera.

Demostración. Notemos que f es abierta y es ligera. Ahora, supongamos que $K = \{0\}$, por el Lema 3.1.10, $C_K^n(f)^{-1}(C_{n_{f(K)}}^I) = C_{n_K}^J$. Sea \mathfrak{U} un subconjunto abierto de $C_K^n(J)$. Si $C_{n_K}^J \notin \mathfrak{U}$, entonces $(\pi_K^J)^{-1}(\mathfrak{U}) \cap C_{n_K}(J) = \emptyset$. Además, $C_n(J) - C_{n_K}(J) = \langle [-1, 0), (0, 1] \rangle_n$ y $C_n(f)|_{C_n(J) - C_{n_K}(J)}$ es abierta. Por la Proposición 3.1.1, Proposición 1.2.6 y (2) de la Proposición 3.1.4, se tiene que $C_K^n(f)(\mathfrak{U}) = \pi_{f(K)}^I(C_n(f)((\pi_K^J)^{-1}(\mathfrak{U})))$ es un abierto de $C_{f(K)}^n(I)$. Si $C_{n_K}^J \in \mathfrak{U}$, entonces $C_{n_{f(K)}}^I \in C_K^n(f)(\mathfrak{U})$. Notemos que para cada $\mathcal{A} \in C_K^n(f)(\mathfrak{U})$ con $\mathcal{A} \neq C_{n_{f(K)}}^I$, existe un abierto \mathfrak{W} tal que $\mathcal{A} \in \mathfrak{W} \subset C_K^n(f)(\mathfrak{U})$. Como $(\pi_K^J)^{-1}(\mathfrak{U})$ es abierto tal que $C_{n_K}(J) \subset (\pi_K^J)^{-1}(\mathfrak{U})$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $N_H(C_{n_K}(J), \epsilon) \cap C_n(J) \subset (\pi_K^J)^{-1}(\mathfrak{U})$. De la definición de f , tenemos que $C_n(f)(N_H(C_{n_K}(J), \epsilon) \cap C_n(J)) = N_H(C_{n_{f(K)}}(I), \epsilon) \cap C_n(I)$. Así, por el Lema 2.4.8, $C_n(f)(N_H(C_{n_K}(J), \epsilon) \cap C_n(J))$ es un subconjunto abierto contenido en $C_K^n(f)(\mathfrak{U})$. Por lo tanto, $C_K^n(f)$ es abierta.

Ahora, supongamos que $K = \{1\}$ y veamos que $C_K^n(f)$ no es ligera. Notemos que $f^{-1}(f(K)) = \{-1, 1\}$. Por el Lema 3.1.10, $C_K^n(f)^{-1}(C_{n_{f(K)}}^I)$ es no degenerado y por la Proposición 3.1.11, $C_K^n(f)^{-1}(C_{n_{f(K)}}^I)$ es conexo. Por tanto, $C_K^n(f)$ no es ligera. \square

Ejemplo 3.1.13. Sea $f : I \rightarrow S^1$ definida por $f(t) = e^{2\pi it}$. Entonces, f no es pseudo-confluente, ni débilmente monótona, ni libremente descomponible. Si $K = \{0\}$, entonces $C_K^n(f)$ es monótona para cada $n \geq 1$.

Demostración. Notemos que f no es pseudo-confluente, ni débilmente monótona, ni libremente descomponible.

Ahora, sean $K = \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$. Probaremos que $C_K^n(f)$ es monótona. Sea $\mathcal{B} \in C_{f(K)}^n(S^1)$. Supongamos que $\mathcal{B} = C_{n_{f(K)}}^{S^1}$, por la Proposición 3.1.11 se tiene que $C_K^n(f)^{-1}(\mathcal{B})$ es conexo. En otro caso, por el Lema 3.1.10 tenemos que $C_K^n(f)^{-1}(C_{n_{f(K)}}^{S^1}) = \pi_K^I \left(\bigcup_{p \in f^{-1}(f(K))} C_{n_{\{p\}}}([0, 1]) \right)$. Entonces $C_n([0, 1]) - \bigcup_{p \in f^{-1}(f(K))} C_{n_{\{p\}}}([0, 1]) = C_n((0, 1))$. Como $f|_{(0,1)}$ es uno a uno, por el Teorema 3.2.1, $C_K^n(f)|_{\pi_K^I(C_n((0,1)))}$ es uno a uno. Por lo que $C_K^n(f)^{-1}(\mathcal{B})$ es conexo. \square

3.2. Clases de Funciones

Esta sección esta dividida por las diferentes clases de funciones para las cuales se presentan las posibles relaciones entre la función base, la función inducida en el hiperespacio y la función inducida en el hiperespacio cociente.

Inyectivas y Suprayectivas

Teorema 3.2.1. Sean $f : X \rightarrow Y$ una función entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1) f es inyectiva;
- (2) $C_n(f)$ es inyectiva;
- (3) $C_K^n(f)$ es inyectiva para cada $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f)$ es inyectiva para algún $K \in 2^X$.

Demostración. Notemos que (1) y (2) son equivalentes, (2) implica (3), y (3) implica (4). Para probar (4) implica (1). Consideremos $x, y \in X$ tales que $f(x) = f(y)$. Entonces

$$\pi_{f(K)}^Y(\{f(x)\}) = \pi_{f(K)}^Y(\{f(y)\}).$$

Como $C_K^n(f)(\pi_K^X(A)) = \pi_{f(K)}^Y(f(A))$ para cada $A \in C_n(X)$ y $C_K^n(f)$ es inyectiva, $\pi_K^X(\{x\}) = \pi_K^X(\{y\})$. Entonces, $\{x\} = \{y\}$ o $K \subset \{x\} \cap \{y\}$. En cualquier caso, $x = y$. Por tanto, f es inyectiva. \square

Teorema 3.2.2. Sean $f : X \rightarrow Y$ una función entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos las siguientes afirmaciones:

- (1) f es suprayectiva;
- (2) $C_n(f)$ es suprayectiva;
- (3) $C_K^n(f)$ es suprayectiva para cada $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f)$ es suprayectiva para algún $K \in 2^X$.

Entonces (2) y (3) son equivalentes, las condiciones (2), (3) y (4) implican (1).

Demostración. Notemos que (2) implica (3) y (3) implica (4). Probamos que (3) implica (2). Sea $B \in C_n(Y)$ y $K \in 2^X$ tal que $K \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Como $C_K^n(f)$ es suprayectiva, existe $\mathcal{A} \in C_K^n(X)$ tal que $C_K^n(f)(\mathcal{A}) = \pi_{f(K)}^Y(B)$. Además, existe $A \in C_n(X)$ tal que $\pi_K^X(A) = \mathcal{A}$. Por la Observación 3.1.2,

$$C_K^n(f)(\mathcal{A}) = C_K^n(f)(\pi_K^X(A)) = \pi_{f(K)}^Y(C_n(f)(A)) = \pi_{f(K)}^Y(B).$$

Como $\pi_{f(K)}^Y(B) \neq C_{n_{f(K)}}^Y$, entonces $C_n(f)(A) = B$, por lo tanto $C_n(f)$ es suprayectiva. Ahora veamos que 4) implica 1). Sean $K \in 2^X$ tal que $C_K^n(f)$ es suprayectiva y $y \in Y$. Si $y \in f(K)$, existe $k_1 \in K$ tal que $f(k_1) = y$. Ahora, supongamos que $y \notin f(K)$, $\{y\} \notin C_{n_{f(K)}}^Y(Y)$. Entonces $\pi_{f(K)}^Y(\{y\}) \neq C_{n_{f(K)}}^Y$. Como $C_K^n(f)$ es suprayectiva, existe $\mathcal{A} \in C_K^n(X)$ tal que $C_K^n(f)(\mathcal{A}) = \pi_{f(K)}^Y(\{y\})$. Además, existe $A \in C_n(X)$ tal que $\pi_K^X(A) = \mathcal{A}$. Por la Observación 3.1.2, $C_K^n(f)(\pi_K^X(A)) = \pi_{f(K)}^Y(C_n(f)(A)) = \pi_{f(K)}^Y(\{y\})$. Así, existe $a \in A$ tal que $f(a) = y$. \square

Como consecuencia del Teorema 3.2.2 y [15, Proposición 1, p. 784] se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.2.3. *Sean $f : X \rightarrow Y$ una función entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $C_K^n(f) : C_K^n(X) \rightarrow C_{f(K)}^n(Y)$ es suprayectiva para cada $K \in 2^X$ si y sólo si f es débilmente confluyente.*

El Ejemplo 3.1.13 nos garantiza que existen dos continuos X, Y y una función $f : X \rightarrow Y$ tal que f no es débilmente confluyente y $C_K^n(f)$ es suprayectiva para algún $K \in 2^X$.

Homeomorfismos y Abiertas

Teorema 3.2.4. *Sean $f : X \rightarrow Y$ una función entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) f es homeomorfismo;
- (2) $C_n(f)$ es homeomorfismo;
- (3) $C_K^n(f)$ es homeomorfismo para cada $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f)$ es homeomorfismo para algún $K \in 2^X$.

Demostración. De [15, Teorema 46, p. 801], 1) implica (2). Además, notemos que (2) implica (3) y que (3) implica (4). Por el Teorema 3.2.1 y Teorema 3.2.2, f es biyectiva. Así, f es homeomorfismo, por lo que (4) implica (1). \square

Teorema 3.2.5. *Sean $f : X \rightarrow Y$ una función entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos las siguientes afirmaciones:*

- (1) f es homeomorfismo;

- (2) $C_n(f)$ es abierta;
- (3) $C_K^n(f)$ es abierta para cada $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f)$ es abierta para algún $K \in 2^X$.

Entonces (1)-(3) son equivalentes y cada una de las afirmaciones (1)-(3) implican (4).

Demostración. Por [8, Corolario 3.3, p. 122], (1) y (2) son equivalentes. De esto y del Teorema 3.2.4, (2) implica (3). Ahora, probaremos que (3) implica (2). Sea U un subconjunto abierto de $C_n(X)$.

Primero, supongamos que $X \in \mathcal{U}$. Como $C_n(X)$ es localmente conexo en X . Existe un subconjunto abierto y conexo \mathcal{V} de $C_n(X)$ tal que $X \in \mathcal{V} \subset \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$. Por la Proposición 3.1.8, existe $K \in 2^X$ tal que $C_{n_K}(X) \subset \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$. Así, del Lema 2.4.9, $\pi_K^X(\mathcal{U})$ es un subconjunto abierto de $C_K^n(X)$ que contiene a $C_{n_K}^X$. Como $C_K^n(f)$ es una función abierta, tenemos que $C_K^n(f)(\pi_K^X(\mathcal{U}))$ es un subconjunto abierto de $C_{f(K)}^n(Y)$ que contiene a $C_{n_{f(K)}}^Y$. Por la Observación 3.1.2, $(\pi_{f(K)}^Y)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(C_n(f)(\mathcal{U}))) = C_n(f)(\mathcal{U})$, el cual es un subconjunto abierto de $C_n(Y)$.

En otro caso, si $X \notin \mathcal{U}$, del Lema 3.1.9 existe $K \in 2^X$ tal que $C_{n_K}(X) \cap \mathcal{U} = \emptyset$. Como $C_K^n(f)$ es abierta, entonces $\pi_K^X(\mathcal{U})$ y $C_K^n(f)(\pi_K^X(\mathcal{U}))$ son subconjuntos abiertos de $C_K^n(X)$ y $C_{f(K)}^n(Y)$, respectivamente. Además, $C_{n_K}^X \notin \pi_K^X(\mathcal{U})$. Por la Observación 3.1.2,

$$(\pi_{f(K)}^Y)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(C_n(f)(\mathcal{U}))) = C_n(f)(\mathcal{U})$$

es un subconjunto abierto de $C_n(Y)$. Por lo tanto, $C_n(f)$ es una función abierta.

Notemos que (1)-(3) implican (4) por la Observación 3.1.3. \square

El Ejemplo 3.1.12 nos garantiza que existen dos continuos X y Y , y una función $f : X \rightarrow Y$ tal que f no es un homeomorfismo y $C_K^n(f)$ es abierta para algún $K \in 2^X$.

Monótonas, Casi monótonas, Quasi-monótonas y Débilmente monótonas

Teorema 3.2.6. Sean $f : X \rightarrow Y$ una función entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Entonces son equivalentes:

- (1) f es monótona;
 (2) $C_n(f)$ es monótona;
 (3) $C_K^n(f)$ es monótona para cada $K \in 2^X$.

Además, (1), (2), (3) implican (4).

- (4) $C_K^n(f)$ es monótona para algún $K \in 2^X$.

Demostración. Por [15, Teorema 4, p. 784], (1) y (2) son equivalentes. Y por el Teorema 3.1.5, (2) implica (3). Para probar que (3) implica (1), supongamos que existe $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y)$ no es conexo. Sean L_1 y L_2 componentes diferentes de $f^{-1}(y)$. Consideremos $p \notin f^{-1}(y)$, entonces $L_1, L_2 \notin C_{n_{\{p\}}}(X)$ y $\{y\} \notin C_{n_{\{f(p)\}}}(Y)$. Sean $y_1, \dots, y_{n-1} \in Y - \{y, f(p)\}$ tales que $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$. Tomamos M_i una componente de $f^{-1}(y_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Por (3) de la Proposición 3.1.7, $\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, L_j \rangle_n)$ es componente de $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\{y_1, \dots, y_{n-1}, y\}))$ para cada $j \in \{1, 2\}$. Dado que $C_K^n(f)$ es una función monótona, $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\{y_1, \dots, y_{n-1}, y\}))$ es conexo. Entonces

$$\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, L_1 \rangle_n) = \pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, L_2 \rangle_n).$$

Así, $L_1 = L_2$, lo cual es una contradicción.

Por la Observación 3.1.3, (3) implica (4). □

Teorema 3.2.7. *Sea \mathbb{A} alguna de las siguientes clases de funciones entre continuos: casi monótonas, quasi-monótonas, débilmente monótonas. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si $C_K^n(f) \in \mathbb{A}$ para cada $K \in 2^X$, entonces $f \in \mathbb{A}$.*

Demostración. Sea B un subcontinuo de Y tal que $\text{Int}_Y(B) \neq \emptyset$. Consideremos $K \in 2^X$ tal que $K \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Entonces, $C_n(B)$ es un subcontinuo de $C_n(Y)$ tal que $\text{Int}(C_n(B)) \neq \emptyset$ y $C_n(B) \cap C_{n_{f(K)}}(Y) = \emptyset$. Así, $\pi_{f(K)}^Y(C_n(B))$ es un subcontinuo de $C_{f(K)}^n(Y)$ con interior no vacío en $C_{f(K)}^n(Y)$ y $C_{n_{f(K)}}^Y \not\subset \pi_{f(K)}^Y(C_n(B))$.

(a) Si $C_K^n(f)$ es casi monótona, $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(C_n(B)))$ es conexo. Dado que π_K^X es monótona, $(\pi_K^X)^{-1}(C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(C_n(B))))$ es conexo. Por la Observación 3.1.2,

$$(\pi_K^X)^{-1}(C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(C_n(B)))) = C_n(f)^{-1}(C_n(B)).$$

Notemos que $C_n(f)^{-1}(C_n(B)) = \langle f^{-1}(B) \rangle_n$. Con lo que, $f^{-1}(B)$ es conexo. Por tanto, f es casi monótona.

(b) Si $C_K^n(f)$ es quasi-monótona, $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(C_n(B)))$ tiene solo una cantidad finita de componentes, $\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_m$, y $C_K^n(f)(\mathfrak{L}_i) = \pi_{f(K)}^Y(C_n(B))$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Sea L una componente de $f^{-1}(B)$. Por (3) de la Proposición 3.1.7, $\pi_K^X(\langle L \rangle_n)$ es una componente de $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(C_n(B)))$. Notemos que cada componente de $f^{-1}(B)$ determina una componente de $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(C_n(B)))$. Por tanto, $f^{-1}(B)$ tiene una cantidad finita de componentes y por (3) de la Proposición 3.1.6, $f(L) = B$. Con lo que, f es también quasi-monótona. Un argumento similar, prueba el caso donde $C_K^n(f)$ es débilmente monótona. Por lo tanto, $f \in \mathbb{A}$. \square

Por el Teorema 3.1.5, el Teorema 3.2.7 y la Observación 3.1.3 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.2.8. *Sean $f : X \rightarrow Y$ una función entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos \mathbb{A} como en el Teorema 3.2.7 y las siguientes afirmaciones:*

- (1) $f \in \mathbb{A}$;
- (2) $C_n(f) \in \mathbb{A}$;
- (3) $C_K^n(f) \in \mathbb{A}$ para cada $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f) \in \mathbb{A}$ para algún $K \in 2^X$.

Entonces, (2) implica (3) y, (2) y (3) implica (4) y (1).

El Ejemplo 3.1.13 nos garantiza que existen continuos X y Y , y una función $f : X \rightarrow Y$ tal que $C_K^n(f)$ es una función monótona (casi monótona, quasi-monótona, débilmente monótona) para algún $K \in 2^X$ y f no es monótona (casi monótona, quasi-monótona, débilmente monótona).

Fuertemente Libremente Descomponible

Teorema 3.2.9. *Sean $f : X \rightarrow Y$ una función entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $C_K^n(f)$ es casi monótona si y sólo si $C_K^n(f)$ es fuertemente libremente descomponible.*

Demostración. Como cada función casi monótona es fuertemente libremente descomponible, tenemos que la casi monoteneidad de $C_K^n(f)$ implica lo fuertemente libremente descomponible. Por el Teorema 2.5.1, $C_K^n(X)$ es unicoherente. Así, la implicación inversa se sigue de [9, Teorema 4.2, p. 894]. \square

El siguiente resultado es consecuencia de los Teoremas 3.2.8 y 3.2.9.

Corolario 3.2.10. *Sean $f : X \rightarrow Y$ una función entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si $C_K^n(f)$ es fuertemente libremente descomponible, entonces f es casi monótona.*

OM

Sea X un continuo. Recordemos que, dada una sucesión de subconjuntos $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ de X se define $\limsup_{m \rightarrow \infty} A_m$ como el conjunto de puntos $x \in X$ para los que existen una sucesión de enteros positivos $m_1 < m_2 < \dots$ y puntos $x_{m_s} \in A_{m_s}$ tales que $\lim x_{m_s} = x$.

Lema 3.2.11. [15, Lema 12, p. 788] *Una función entre continuos $f : X \rightarrow Y$ es OM si y sólo si, para cada punto $y \in Y$ y cada sucesión de puntos $y_m \in Y$ que converge a y , el $\limsup_{m \rightarrow \infty} f^{-1}(y_m)$ interseca a cada componente de $f^{-1}(y)$.*

Teorema 3.2.12. *Sean $f : X \rightarrow Y$ una función entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos las siguientes condiciones:*

- (1) f es OM;
- (2) $C_n(f)$ es OM;
- (3) $C_K^n(f)$ es OM para cada $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f)$ es OM para algún $K \in 2^X$.

Entonces, (2) implica (3) y, (2) y (3) implican (4) y (1).

Demostración. Por el Teorema 3.1.5, (2) implica (3). Ahora mostraremos que (3) implican (1). Sean $y \in Y$ y $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en Y que converge a y . Consideremos $K \in 2^X$ tal que $f(K) \cap \{y, y_1, \dots\} = \emptyset$. Tomamos $z_1, \dots, z_{n-1} \in Y - (f(K) \cup \{y, y_1, \dots\})$ tales que $z_j \neq z_l$ para $j \neq l$. Sea M_j una componente de $f^{-1}(z_j)$ para cada $j \in \{1, \dots, n-1\}$ y sea M_n una

componente de $f^{-1}(y)$. Por (3) de la Proposición 3.1.7, $\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_n \rangle_n)$ es una componente de $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\{z_1, \dots, z_{n-1}, y\}))$. Como la sucesión

$$\{\pi_{f(K)}^Y(\{z_1, \dots, z_{n-1}, y_i\})\}_{i \in \mathbb{N}}$$

converge a $\pi_{f(K)}^Y(\{z_1, \dots, z_{n-1}, y\})$. Por el Lema 3.2.11,

$$\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_n \rangle) \cap \limsup_{t \rightarrow \infty} C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\{z_1, \dots, z_{n-1}, y_t\})) \neq \emptyset.$$

Sea $A \in \langle M_1, \dots, M_n \rangle$ tal que

$$\pi_K^X(A) \in \limsup_{t \rightarrow \infty} C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\{z_1, \dots, z_{n-1}, y_t\})).$$

Entonces, existe una subsucesión $\{\pi_K^X(A_{t_r})\}_{r \in \mathbb{N}}$ tal que para cada $r \in \mathbb{N}$, $\pi_K^X(A_{t_r}) \in C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\{z_1, \dots, z_{n-1}, y_{t_r}\}))$ y $\lim_{r \rightarrow \infty} \pi_K^X(A_{t_r}) = \pi_K^X(A)$. Sea $a \in A \cap M_n$. Dado que $\lim_{r \rightarrow \infty} A_{t_r} = A$, existe una sucesión $\{a_{t_r}\}_{r \in \mathbb{N}}$ con $a_{t_r} \in A_{t_r}$ tal que $a_{t_r} \rightarrow a$. Así, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(a_{t_r}) = y_{t_r}$ para cada $r \geq m_0$. Con lo que $a \in A \cap M_n \cap \limsup_{t \rightarrow \infty} f^{-1}(y_t)$. Por tanto, por el Lema 3.2.11, f es OM.

Observemos que (2) implica (1) y (3) implica (4). \square

Confluentes, Semi-confluentes, Débilmente confluentes, Pseudo-confluentes, Unión

Dados un continuo X y $n \in \mathbb{N}$. Si $x_1, \dots, x_{n-1} \in X$ y B es un subcontinuo de X , notemos que $\mathcal{B} = \langle \{x_1\}, \dots, \{x_{n-1}\}, B \rangle_n$ es homeomorfo a B y $\mathcal{B} \subset C_n(X)$. Además, si B es un continuo irreducible, entonces \mathcal{B} es un continuo irreducible.

Teorema 3.2.13. *Sea \mathbb{A} alguna de las siguientes clases de funciones entre continuos: confluentes, semi-confluentes, débilmente confluentes, pseudo-confluentes, unión. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si $C_K^n(f) \in \mathbb{A}$ para cada $K \in 2^X$, entonces $f \in \mathbb{A}$.*

Demostración. Sea B un subcontinuo propio (e irreducible para el caso de pseudo-confluente) de Y . Consideremos $K \in 2^X$ tal que $K \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Sean D_1 y D_2 componentes de $f^{-1}(B)$ y sean $y_1, \dots, y_{n-1} \in Y - (B \cup f(K))$ tales que $y_i \neq y_j$ para $i \neq j$. Sea M_i una componente de $f^{-1}(y_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Para $i \in \{1, 2\}$, por (3) de la Proposición 3.1.7,

$\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, D_i \rangle_n)$ es una componente de $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\mathcal{B}))$ donde $\mathcal{B} = \langle \{x_1\}, \dots, \{x_{n-1}\}, B \rangle_n$. Notemos que $\mathcal{B} \cap C_{n_{f(K)}}(Y) = \emptyset$ (y que $\pi_{f(K)}^Y(\mathcal{B})$ es un subcontinuo irreducible de $C_{n_{f(K)}}^Y(Y)$ tal que $C_{n_{f(K)}}^Y \not\subseteq \pi_{f(K)}^Y(\mathcal{B})$). Consideramos los siguientes casos:

(a) Si $C_K^n(f)$ es confluyente, entonces $C_n(f)(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, D_i \rangle_n) = \mathcal{B}$, por (1) de la Proposición 3.1.6. Por lo tanto, $f(D_i) = B$ para cada componente de $f^{-1}(B)$.

(b) Si $C_K^n(f)$ es semi-confluyente. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que

$$C_K^n(f)(\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, D_1 \rangle_n)) \subset C_K^n(f)(\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, D_2 \rangle_n)).$$

Entonces $C_n(f)(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, D_1 \rangle_n) \subset C_n(f)(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, D_2 \rangle_n)$. Con lo que $f(D_1) \subset f(D_2)$.

(c) Si $C_K^n(f)$ es unión, entonces

$$C_K^n(f)(\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, D_1 \rangle_n)) \cap C_K^n(f)(\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, D_2 \rangle_n)) \neq \emptyset.$$

Así, $C_n(f)(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, D_1 \rangle_n) \cap C_n(f)(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, D_2 \rangle_n) \neq \emptyset$. Con lo que $f(D_1) \cap f(D_2) \neq \emptyset$.

(d) Si $C_K^n(f)$ es débilmente confluyente, por (2) de la Proposición 3.1.6, existe un continuo \mathfrak{M} de $C_n(X)$ tal que $C_n(f)(\mathfrak{M}) = \mathcal{B}$. Y además, como $\mathfrak{M} \cap C_{n_K}(X) = \emptyset$, podemos encontrar una componente M_n de $f^{-1}(B)$ tal que $\langle M_1, \dots, M_n \rangle_n \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset$. Entonces, por (2) de la Proposición 3.1.7, $\langle M_1, \dots, M_n \rangle_n$ es componente de $C_n(f)^{-1}(\mathcal{B})$. Así, $\mathfrak{M} = \langle M_1, \dots, M_n \rangle_n$ y $f(M_n) = B$.

(e) Si $C_K^n(f)$ es pseudo-confluyente, existe $\mathcal{C} \subset C_K^n(X)$ tal que \mathcal{C} es una componente de $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\mathcal{B}))$ y $C_K^n(f)(\mathcal{C}) = \pi_{f(K)}^Y(\mathcal{B})$. Dado que $C_{n_K}^X \not\subseteq \mathcal{C}$, $(\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{C})$ es una componente de $(\pi_K^X)^{-1}(C_K^n(f)(\pi_{f(K)}^Y(\mathcal{B}))) = C_n(f)^{-1}(\mathcal{B})$. Notemos que $C_n(f)((\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{C})) = \mathcal{B}$.

Por otro lado, $\bigcup (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(y_1) \cup \dots \cup f^{-1}(y_{n-1}) \cup f^{-1}(B)$, para cada $i = 1, \dots, n-1$ tenemos que $(\bigcup (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{C})) \cap f^{-1}(y_i) \neq \emptyset$ y además $(\bigcup (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{C})) \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$. Como $\bigcup (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{C})$ tiene a lo más n componentes, entonces $\bigcup (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{C})$ tiene exactamente n componentes C_1, \dots, C_n . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $C_i \subset f^{-1}(y_i)$ para $i = 1, \dots, n-1$ y $C_n \subset f^{-1}(B)$. Sea C la componente de $f^{-1}(B)$ tal que $C_n \subset C$.

Afirmación. $f(C) = B$.

Sean $b \in B$ y $E = \{y_1, \dots, y_{n-1}\} \cup \{b\}$. Entonces, $E \in \mathcal{B}$. Con lo cual,

existe $A \in (\pi_K^X)^{-1}(\mathfrak{C})$ tal que $f(A) = E$. Esto implica que $b \in f(A) \subset f(\bigcup (\pi_K^X)^{-1}(\mathfrak{C})) = f(C_1) \cup \dots \cup f(C_n)$. Si existe $j \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $b \in f(C_j)$, entonces $b = y_j$, lo cual es una contradicción. Entonces, $b \in f(C_n)$. Así, $b \in f(C)$, se sigue que $B \subset f(C)$. Esto concluye la demostración del Teorema. \square

Como consecuencia del Teorema 3.1.5, el Teorema 3.2.13 y la Observación 3.1.3 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.2.14. *Sean $f : X \rightarrow Y$ una función entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos \mathbb{A} como en el Teorema 3.2.13 y las siguientes afirmaciones:*

- (1) $f \in \mathbb{A}$;
- (2) $C_n(f) \in \mathbb{A}$;
- (3) $C_K^n(f) \in \mathbb{A}$ para cada $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f) \in \mathbb{A}$ para algún $K \in 2^X$.

Entonces, (2) implica (3) y, (2) y (3) implica (4) y (1).

El Ejemplo 3.1.13 nos garantiza que existen continuos X y Y , y una función $f : X \rightarrow Y$ tales que $C_K^n(f)$ es una función confluyente (semi-confluyente, débilmente confluyente, pseudo-confluyente) para algún $K \in 2^X$ y f no es confluyente (semi-confluyente, débilmente confluyente, pseudo-confluyente).

Atriódicas

Teorema 3.2.15. *Sean $f : X \rightarrow Y$ una función entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Consideramos las siguientes afirmaciones:*

- (1) f es atriódica;
- (2) $C_n(f)$ es atriódica;
- (3) $C_K^n(f)$ es atriódica para cada $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f)$ es atriódica para algún $K \in 2^X$.

Entonces, (2) implica (3) y, (2) y (3) implican (4) y (1).

Demostración. Por el Teorema 3.1.5, (2) implica (3). Veamos que (3) implica (1). Sea B un subcontinuo propio de Y y sea $K \in 2^X$ tal que $K \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Consideremos $y_1, \dots, y_{n-1} \in Y - (B \cup f(K))$ con $y_i \neq y_j$ para $i \neq j$. Como $C_K^n(f)$ es atriódica, existen dos componentes \mathfrak{D}_1 y \mathfrak{D}_2 de $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\langle \{y_1\}, \dots, \{y_{n-1}\}, B \rangle_n))$ tales que

a) $C_K^n(f)(\mathfrak{D}_1) \cup C_K^n(f)(\mathfrak{D}_2) = \pi_{f(K)}^Y(\langle \{y_1\}, \dots, \{y_{n-1}\}, B \rangle_n)$,

b) para cada componente \mathfrak{C} de $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\langle \{y_1\}, \dots, \{y_{n-1}\}, B \rangle_n))$, tenemos que $C_K^n(f)(\mathfrak{C}) = \pi_{f(K)}^Y(\langle \{y_1\}, \dots, \{y_{n-1}\}, B \rangle_n)$, $C_K^n(f)(\mathfrak{C}) \subset C_K^n(f)(\mathfrak{D}_1)$ o, $C_K^n(f)(\mathfrak{C}) \subset C_K^n(f)(\mathfrak{D}_2)$.

Para cada $j = 1, 2$, $(\pi_K^X)^{-1}(\mathfrak{D}_j) \cap C_{nK}(X) = \emptyset$. Entonces, podemos encontrar subconjuntos M_1^j, \dots, M_n^j de X tales que M_i^j es una componente de $f^{-1}(y_i)$ para cada $i = 1, \dots, n-1$ y M_n^j es una componente de $f^{-1}(B)$. Supongamos que $\mathfrak{D}_j \cap \pi_K^X(\langle M_1^j, \dots, M_n^j \rangle_n) \neq \emptyset$. Como \mathfrak{D}_j es componente de $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\langle \{y_1\}, \dots, \{y_{n-1}\}, B \rangle_n))$, por (3) de la Proposición 3.1.7, $\mathfrak{D}_j = \pi_K^X(\langle M_1^j, \dots, M_n^j \rangle_n)$. Así, por a) $f(M_n^1) \cup f(M_n^2) = B$. Ahora, sea C una componente de $f^{-1}(B)$. De que $\pi_K^X(\langle M_1^1, \dots, M_{n-1}^1, C \rangle_n)$ es componente de $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\langle \{y_1\}, \dots, \{y_{n-1}\}, B \rangle_n))$, por b), $f(C) = B$ o, $f(C) \subset f(M_n^1)$ o, $f(C) \subset f(M_n^2)$.

Notemos que (2) implica (1) y que (3) implica (4). \square

Ligeras

Teorema 3.2.16. *Sean $f : X \rightarrow Y$ una función entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos las siguientes condiciones:*

- (1) f es ligera;
- (2) $C_n(f)$ es ligera;
- (3) $C_K^n(f)$ es ligera para cada $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f)$ es ligera para algún $K \in 2^X$.

Entonces, (2) y (3) implican (1), y (3) implica (4).

Demostración. (2) implica (1) se sigue del [14, Teorema 3.10, p. 185] y por la Observación 3.1.3 se sigue que (3) implica (4). Ahora, supongamos que $C_K^n(f)$ es ligera. Probaremos que f es una función ligera, podemos suponer que existe $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y)$ no es totalmente desconexo. Sea M una

componente no degenerada de $f^{-1}(y)$. Sea $K \in 2^X$ tal que $K \cap f^{-1}(y) = \emptyset$ y sean $y_1, \dots, y_{n-1} \in Y - (f(K) \cup \{y\})$ tales que $y_i \neq y_j$ para $i \neq j$. Sea M_i una componente de $f^{-1}(y_i)$ para cada $i = 1, \dots, n-1$. Por (3) de la Proposición 3.1.7, $\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, M \rangle_n)$ es un subcontinuo no degenerado de $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\{y_1, \dots, y_{n-1}, y\}))$, lo cual es una contradicción. \square

El Ejemplo 3.1.12 nos garantiza que existen dos continuos X y Y , y una función $f : X \rightarrow Y$ tal que f es ligera y $C_K^n(f)$ no es ligera para algún $K \in 2^X$.

Resultados

Dado un continuo X se logró demostrar que si este tiene la propiedad P , entonces el hiperespacio $C_K^n(X)$ también preserva dicha propiedad para cada $n \in \mathbb{N}$ y en algunos casos de manera inversa. Además, se caracterizaron algunos continuos. En general, se obtuvieron los siguientes resultados.

1. Un continuo X es de Peano si y sólo si $C_K^n(X)$ es un continuo de Peano.
2. Dado $n \in \mathbb{N}$. Un continuo no degenerado X es indescomponible si y sólo si $C_K^n(X) - \{C_{nK}^X\}$ no es arco conexo para cada $K \in 2^X$.
3. $C_K^n(X)$ contiene n -celdas para cada $K \in 2^X$.
4. Si un continuo X contiene un R^i -continuo con $i \in \{1, 2, 3\}$ y $K \in 2^X$, entonces $C_K^n(X)$ no es contráctil.
5. $C_K^n(X)$ siempre es unicoherente para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $K \in 2^X$.
6. El continuo X es aposindético si y sólo si $C_K^n(X)$ es aposindético para cada $K \in 2^X$.
7. En la clase de las gráficas finitas, logramos dar una fórmula para calcular la dimensión de $C_K^n(X)$.
8. $C_K^n(I)$ es homeomorfo a $\sum(C_K^n(I))$ para $K \in \{\{0\}, \{1\}\}$.
9. Si X es una gráfica finita, $C_K^1(X)$ es homeomorfo al $\text{Cono}(X)$ si y sólo si
 - a) $X = I$ y $K \in 2^X - F_1((0, 1))$, o,
 - b) $X = S^1$ y $K \in 2^X$.

Finalmente, estudiamos la relación de una función entre continuos y sus funciones inducidas, para las siguientes clases de funciones: monótonas, OM, confluentes, semi-confluentes, débilmente confluentes, pseudo-confluentes, quasismonótonas, débilmente monótonas, unión, casi monótonas, atriódicas, libremente descomponible o fuertemente libremente descomponible.

Discusión

Tras describir los diferentes resultados obtenidos, realizamos discusiones que sirvan para consolidar lo obtenido, al tiempo que genera futuras líneas de investigación. Esto debido a que los hiperespacios cociente son una herramienta que ayuda a conocer el hiperespacio base, así como propiedades que pudiera tener el continuo base. Este hiperespacio cociente ayuda a descubrir que tanto se puede comprimir en el hiperespacio y seguir manteniendo su estructura topológica. Los resultados presentados en este trabajo, muestran que las hipótesis planteadas en este proyecto han sido abordadas en buena medida, debido a que hay una gran variedad de propiedades topológicas y una extensa gama de clases de funciones. Lo cual dan la pauta a seguir investigando en esta dirección.

Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo fue desarrollar herramientas para conocer propiedades del hiperespacio $C_n(X)$ al momento de comprimir a un punto dentro de este, el subespacio $C_{n_K}(X)$. Con base al anteproyecto los objetivos planteados han sido cubiertos, consiguiendo varias propiedades del hiperespacio cociente $C_K^n(X)$. También se consiguió dar relaciones entre las funciones base y las inducidas para diversas clases de funciones entre continuos.

Bibliografía

- [1] J. G. Anaya, F. Capulín, M. A. Lara y F. Orozco-Zitli, *Induced mappings between quotient spaces of n -fold hyperspaces of continua*, Glas. Mat. Ser. III **51**(71) (2016), 475-490.
- [2] J. G. Anaya, E. Castañeda-Alvarado, A. Fuentes-Montes de Oca y F. Orozco-Zitli, *Making holes in the cone, suspension and hyperspaces of some continua*, Comment. Math. Univ. Carolin. **59** (2018), 343-364.
- [3] B. S. Baik, K. Hur y C. J. Rhee, *R^i -sets and contractibility*, J. Korean Math. Soc. **34** (1997), 309-319.
- [4] F. Barragán, *Induced maps on n -fold symmetric product suspensions*, Topology Appl. **158** (2011), 1192-1205.
- [5] F. Barragán, S. Macías y J. F. Tenorio, *More on induced maps on n -fold symmetric product suspensions*, Glas. Mat. Ser. III **50**(70) (2015), 489-512.
- [6] D. E. Bennett, *Aposyndetic properties of unicoherent continua*, Pacific J. Math. **37** (1971), 585-589.
- [7] J. Camargo, *Some relationships between induced mappings*, Topology Appl. **157** (2010) 2038-2047.
- [8] J. Camargo, *Openness of the induced map $C_n(f)$* , Bol. Mat. (N.S.) **16** (2009), 115-123.
- [9] J. Camargo y S. Macías, *On freely decomposable maps*, Topology Appl. **159** (2012) 891-899.

- [10] J. Camargo y S. Macías, *Quotients of n -fold hyperspaces*, Topology Appl. **197** (2016), 154-166.
- [11] E. Castañeda-Alvarado, R. C. Mondragón, N. Ordoñez y F. Orozco-Zitli *The hyperspace $F_n^K(X)$* , preprint.
- [12] J. J. Charatonik, *Monotone mappings and unicoherence at subcontinua*, Topology Appl. **33** (1989), 209-215.
- [13] J. J. Charatonik, *Recent Research in Hyperspace Theory*, Extracta Math. **18** (2003), 235-262.
- [14] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Lightness of induced mappings*, Tsukuba J. Math. **22** (1998), 179-192.
- [15] J. J. Charatonik, A. Illanes y S. Macías, *Induced mappings on the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X* , Houston J. Math., **28** (2002), 781-805.
- [16] R. Duda, *On the hyperspaces of subcontinua of a finite graph, I*, Fund. Math, **62** (1968), 265-286.
- [17] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.
- [18] R. Escobedo, Ma. de J. López y S. Macías, *On the hyperspace suspension of a continuum*, Topology Appl. **138** (2004), 109-124.
- [19] F. Hausdorff, *Grundzuge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914. Primera edic., New York, 1949.
- [20] R. Hernández-Gutiérrez y V. Martínez-de-la-Vega, *Rigidity of symmetric products*, Topology Appl. **160** (2013), 1577-1587.
- [21] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, 28. Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.
- [22] A. Illanes, *The hyperspaces $C_2(X)$ for a finite graph X is unique*, Glas. Mat. Ser. III **37**(57) (2002), 347-363.

- [23] A. Illanes, *A model for the hyperspace $C_2(S^1)$* , Q & A in General Topology, **22** (2004), 117-130.
- [24] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1999.
- [25] Ma. de J. López y S. Macías, *Induced maps on n -fold hyperspaces*, Houston J. Math. **33** (2007), 1047-1057.
- [26] T. Maćkowiak, *Continuous mappings on continua*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **158** (1979), 95 pp.
- [27] J. C. Macías, *On the n -fold pseudo-hyperspace suspension of continua*, Glas. Mat. Ser. III **43**(63) (2008), 439-449.
- [28] S. Macías, *Hyperspaces and cones*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3069-3073.
- [29] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X , II*, Topology Proc. **25** (2000), 255-276.
- [30] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X* , Topology Appl. **109** (2001), 237-256.
- [31] S. Macías, *On the n -fold hyperspace suspension of continua*, Topology Appl. **138** (2004), 125-138.
- [32] S. Macías, *Topics on Continua*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2005.
- [33] S. Macías, *On the n -fold hyperspace suspension of continua. II*, Glas. Mat. Ser. III **41**(61) (2006), 335-343.
- [34] V. Martínez-de-la-Vega, *Dimension of n -fold hyperspaces of graphs*, Houston J. Math. **32** (2006), 783-799.
- [35] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1978.

- [36] S. B. Nadler, Jr., *A fixed point theorem for hyperspaces suspensions*, Houston J. Math. **5** (1979), 125-132.
- [37] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.
- [38] S. B. Nadler, Jr., *Dimension Theory, An Introduction with exercises*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, 18. Sociedad Matemática Mexicana, México, 2002.
- [39] L. Vietoris, *Bereiche zweiter Ordnung*, Monats. Math. Phys. **32** (1922), 258-280.
- [40] G. T. Whyburn, *Analitic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. **28**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1942.

ANEXOS

ON THE HYPERSPACE $C_n(X)/C_{n_K}(X)$

JOSÉ G. ANAYA, ENRIQUE CASTAÑEDA-ALVARADO*,
AND JOSÉ A. MARTÍNEZ-CORTEZ

ABSTRACT. Let X be a continuum and n a positive integer. Let $C_n(X)$ be the hyperspace of nonempty subsets of X with at most n components. Let K be a compact subset of X , $C_{n_K}(X)$ is the hyperspace of subsets of X which contain K and have at most n components. Both hyperspaces are considered with the Hausdorff metric. In this paper, we consider the hyperspace $C_K^n(X) = C_n(X)/C_{n_K}(X)$ which can be a tool to study the space $C_n(X)$. We study this hyperspace in the class of finite graphs and in general, we prove some properties such as: aposynthesis, local connectedness, arcwise disconnectedness, contractibility, uncoherence and homogeneity.

1. INTRODUCTION

In this paper, the set of positive integers is denoted by \mathbb{N} and a *map* is a continuous function. A *continuum* is a nondegenerate compact connected metric space. Given a continuum X , a *subcontinuum* of X is a subset of X which is a continuum. Given $n \in \mathbb{N}$, we consider the following hyperspaces of X :

- $2^X = \{A \subset X : A \text{ is nonempty and closed}\}$,
- $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ is connected}\}$,
- $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ has at most } n \text{ points}\}$,
- $C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ has at most } n \text{ components}\}$.

All endowed with the Hausdorff metric (see the definition below), we write $C(X)$ instead of $C_1(X)$.

The hyperspace $C_n(X)$ is called *n-fold hyperspace* of X , his structure topologic is different to other hyperspaces, see [15] and [16].

On the other hand, at 1979 Sam B. Nadler Jr., see [21], began the study of hyperspace suspension, when the author considered the quotient space $HS(X) = C(X)/F_1(X)$, which he called the *hyperspace suspension* of X . Later, in 2004, R. Escobedo, M. de J. López and S. Macías extended the study of hyperspace

2010 *Mathematics Subject Classification*. Primary 54B15, 54B20; Secondary 54F15.

Key words and phrases. Hyperspaces, Continuum, Containment hyperspaces, Finite graphs, Aposynthesis, Peano continuum, Contractibility.

*Corresponding author

Email address: jgao@uaemex.mx (J. G. Anaya), eca@uaemex.mx (E. Castañeda-Alvarado), jamartinez@uaemex.mx (J. A. Martínez-Cortez).

suspension in [9]. Subsequently, in the same year, S. Macías generalized the study of hyperspace suspension, considering the quotient space $HS_n(X) = C_n(X)/F_n(X)$, which he called the *n-fold hyperspace suspension* of X , see [17], continuing with the study in 2006, see [18]. In the year 2008, J. C. Macías analyzes the quotient space $PHS_n(X) = C_n(X)/F_1(X)$, which he called the *n-fold pseudo-hyperspace suspension* of X , see [13]. J. Camargo and S. Macías in 2016 considered the quotient space $C_1^n(X) = C_n(X)/C_1(X)$, they show several of their properties, see [4].

Following this line of research, given K be a closed subset of continuum X and a hyperspace $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C(X), F_n(X), C_n(X)\}$. We consider the quotient space

$$\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}_K(X)$$

with the quotient topology, where $\mathcal{H}_K(X)$ is the containment hyperspace define by set $\{A \in \mathcal{H}(X) : K \subset A\}$ considered as subspace of $\mathcal{H}(X)$.

The fact that $\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}_K(X)$ is a continuum follows from [22, Theorem 3.10, p. 40]. π_K denotes the quotient map $\pi_K : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)/\mathcal{H}_K(X)$, and $\mathcal{H}_K = \pi_K(\mathcal{H}_K(X))$.

In this paper we studied some topological properties of the quotient space $C_K^n(X) = C_n(X)/C_{n_K}(X)$ such as local connectedness, arcwise disconnectedness, contractibility, unicoherence, homogeneity and aposyndesis. Throughout the article you can see how this space be a good tool to study hyperspace $C_n(X)$. The paper is divided into six sections. In Section 2 we provide the basic definitions, notation and some basic results of cut points. In Section 3 for the class of finite graphs we calculate the dimension of space $C_K^n(X)$, and the relationship it has with cones, suspensions and space $C_n(X)$. In the Section 4 we give conditions to K under which the space $C_K^n(X)$ is aposyndetic and finitely aposyndetic, in particular we prove that X is aposyndetic if and only if $C_K^n(X)$ is aposyndetic for each $K \in F_1(X)$, see Theorem 4.5. In Section 5 we study the connectedness of $C_K^n(X)$, as locally connectedness, in particular we characterize the local connectedness of X in terms of the local connectedness of $C_K^n(X)$, see Theorem 5.3. Also, we present results of the arcwise disconnectedness of $C_K^n(X) - \{C_{n_K}\}$, which allow to give a characterization of the indecomposable continua in terms of the non-arcwise connectedness of $C_K^n(X) - \{C_{n_K}\}$, see Theorem 5.8. Finally, in Section 6, we analyze other topological properties as the non-contractibility, homogeneity and when $C_K^n(X)$ contains n -cells.

Remark 1.1. *Let $n \in \mathbb{N}$. If $K = X$, then $C_K^n(X)$ is homeomorphic to $C_n(X)$.*

Remark 1.2. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $K \in 2^X$. Then*

$$\pi_K|_{C_n(X) - C_{n_K}(X)} : C_n(X) - C_{n_K}(X) \rightarrow C_K^n(X) - \{C_{n_K}\}$$

is a homeomorphism.

2. PRELIMINARIES

An *arc* is any topological space homeomorphic to $I = [0, 1]$ and a *simple closed curve* is any topological space homeomorphic to the unit circle S^1 . We denote the closure, interior and boundary of a subset A of a topological space Z by $\text{Cl}_Z(A)$, $\text{Int}_Z(A)$ and $\text{Bd}(A)$, respectively. When two topological spaces Y and Z are homeomorphic is denoted as $Y \approx Z$.

Let X be a continuum with metric d and $\epsilon > 0$. Given $x \in X$ and $A \in 2^X$, we define the open ball in X of radius ϵ and center x as

$$B_\epsilon^d(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\},$$

and

$$N_d(A, \epsilon) = \bigcup_{x \in A} B_\epsilon^d(x).$$

The hyperspace 2^X is considered with the Hausdorff metric H_d , see [12, Definition 2.1, p. 11], defined as follows: For each $A, B \in 2^X$,

$$H_d(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N_d(B, \epsilon) \text{ and } B \subset N_d(A, \epsilon)\}.$$

A map $f : X \rightarrow Y$ between continua induces a natural map $f^* : 2^X \rightarrow 2^Y$ defined by

$$f^*(A) = f(A) \text{ for all } A \in 2^X.$$

Thus, if $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C(X), F_n(X), C_n(X)\}$, then the induced map $\mathcal{H}(f) : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(Y)$ is the map $\mathcal{H}(f) = f^*|_{\mathcal{H}(X)}$, see [12, Theorem 13.3, p. 106].

Let $A, B \in 2^X$. An *order arc* from A to B is a mapping $\alpha : I \rightarrow 2^X$ such that $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$, and $\alpha(r)$ is a proper subset of $\alpha(s)$ whenever $r < s$, see definition and existence in [20, 1.2-1.8, p. 57-59].

A *Whitney map for $C(X)$* is a map $\mu : C(X) \rightarrow [0, \infty)$ that satisfies the following two conditions:

- (1) $\mu(A) < \mu(B)$ for any $A, B \in C(X)$ such that $A \subset B$ and $A \neq B$;
- (2) $\mu(A) = 0$ if and only if $A \in F_1(X)$.

Given a continuum X . For any finitely many subsets U_1, \dots, U_r of X , we define $\langle U_1, \dots, U_r \rangle$ as

$$\{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^r U_i, A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ for each } i = 1, \dots, r\}.$$

The set

$$\{\langle U_1, \dots, U_r \rangle : \text{for each } i \in \{1, \dots, r\}, U_i \text{ is an open set of } X, r \in \mathbb{N}\}$$

is a basis for the *Vietoris topology* of 2^X . This topology, matches with the topology induced by the Hausdorff metric, see [12, Theorem 3.2, p. 18]. Given $n \in \mathbb{N}$ we write $\langle U_1, \dots, U_r \rangle_n$ instead of $\langle U_1, \dots, U_r \rangle \cap C_n(X)$.

A *Peano continuum* is a locally connected continuum. X is *connected im kleinen* at p provided that every neighborhood of p contains a connected neighborhood of p . A continuum X is *unicoherent* provided that whenever A and B are subcontinua of X , such that $A \cup B = X$, $A \cap B$ is connected. By [16, Theorem 4.8, p. 244], $C_n(X)$ is unicoherent. Notice that, if $K \in 2^X$, π_K is monotone and also, by [22, Proposition 3.7, p. 39], π_K is a closed map. Thus, by [6, Corollary 7, p. 211] we have next result.

Theorem 2.1. *Let $n \in \mathbb{N}$. If X is a continuum and $K \in 2^X$, then $C_K^n(X)$ is unicoherent.*

2.1. Cut points. In a connected topological space Z . A *cut set* of Z is a subset S of Z such that $Z - S$ is not connected. A *cut point* of Z is a point $p \in Z$ such that $\{p\}$ is a cut set of Z .

Proposition 2.2. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $p \in X$. p is a cut point of X if and only if $C_{n_{\{p\}}}(X)$ is a cut set of $C_n(X)$.*

Proof. If $p \in X$ is a cut point, then there are disjoint open sets U, V such that $X - \{p\} = U \cup V$. Since $\langle U \rangle_n$ and $\langle X - \{p\}, V \rangle_n$ are disjoint open sets in $C_n(X)$, it's enough to prove that $C_n(X) - C_{n_{\{p\}}}(X) = \langle U \rangle_n \cup \langle X - \{p\}, V \rangle_n$.

Let $A \in C_n(X) - C_{n_{\{p\}}}(X)$. Then $p \notin A$ and $A \subset X - \{p\} = U \cup V$. If $A \cap V \neq \emptyset$ then $A \in \langle X - \{p\}, V \rangle_n$, in another case, $A \in \langle U \rangle_n$. Thus $C_n(X) - C_{n_{\{p\}}}(X) \subset \langle U \rangle_n \cup \langle X - \{p\}, V \rangle_n$.

On the other hand, if $A \in \langle U \rangle_n \cup \langle X - \{p\}, V \rangle_n$, then $A \subset U$, or, $A \subset X - \{p\} = U \cup V$ and $A \cap V \neq \emptyset$. Thus $A \subset X - \{p\}$, i.e. $p \notin A$. Then $\langle U \rangle_n \cup \langle X - \{p\}, V \rangle_n \subset C_n(X) - C_{n_{\{p\}}}(X)$. Therefore $C_{n_{\{p\}}}(X)$ is a cut set of $C_n(X)$.

The converse, suppose that $X - \{p\}$ is connected then $C_n(X) - C_{n_{\{p\}}}(X) = C_n(X - \{p\})$ is connected. This is a contradiction. Therefore $X - \{p\}$ is not connected, and so, p is a cut point of X . \square

Corollary 2.3. *Let X be a continuum, $n \in \mathbb{N}$ and $p \in X$. Then p is a cut point of X if and only if $C_{n_{\{p\}}}$ is a cut point of $C_{\{p\}}^n(X)$.*

A continuum X is said to be *colocally connected* in $p \in X$, provided that p has a local base of open sets whose complements are connected. X is said to be *colocally connected*, if X is colocally connected at each of its points.

Proposition 2.4. *If X is colocally connected in $p \in X$, then p is not a cut point of X .*

Proof. Suppose that p is a cut point of X , then exist U, W open non-empty subsets of X such that $X - \{p\} = U \cup W$ and $U \cap W = \emptyset$. Let $u \in U$ and $w \in W$. Let $\delta = \frac{1}{2} \min\{d(p, u), d(p, w)\} > 0$. Since X is colocally connected in p , there exists $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ a local base of open subsets at p where J is an index set.

Then there exists $\alpha \in J$ such that $p \in V_\alpha \subset B_\delta(p)$. Thus $X - B_\delta(p) \subset X - V_\alpha \subset X - \{p\}$. Since $X - V_\alpha$ is connected, we may assume that $X - V_\alpha \subset U$. Notice that $u, w \in X - B_\delta(p)$. So, $u, w \in U$ and $w \in U \cap W$. This is a contradiction. Therefore p is not a cut point of X . \square

3. FINITE GRAPHS

A *free arc* in a continuum X is an arc A in X such that A without its end points is an open set in X . A *Hilbert cube* is any space homeomorphic to $\prod_{j=1}^{\infty} I_j$ with the product topology, where $I_j = [0, 1]$ for each $j \in \mathbb{N}$.

A *finite graph* X is a continuum which can be written as the union of finitely many arcs any two of which are either disjoint or intersect only in one or both of their end points. If X is a finite graph, the arcs and the end points of the arcs are called *edges* and *vertices*, respectively. Given $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, a *simple m -od* Y is a finite graph which is the union of m arcs J_1, \dots, J_m such that there exists a point $v \in Y$ with the property $J_i \cap J_j = \{v\}$, if $i \neq j$, and v is an end point of J_i for each $i = 1, \dots, m$. The point v is called the *core of Y* . A simple 3-od is called a *simple triod*.

The order of a point p in a finite graph X , will be defined using the classic Menger definition. Given a point $p \in X$ and $m, n \in \mathbb{N}$, the order of p in X , denoted by $ord_X(p)$, is defined as $ord_X(p) \leq n$, if for every $\epsilon > 0$ there exists an open set G containing p with diameter of G less than ϵ such that $\text{Bd}(G)$ consists of at most n points, also define $ord_X(p) = n$ if $ord_X(p) \leq n$ and $ord_X(p)$ is not less or equal to m for each $m < n$.

A point $q \in X$ is called an *end point of X* provided that $ord_X(q) = 1$. A point $q \in X$ is called a *ramification point of X* provided that $ord_X(q) \geq 3$. The set of ramification points of X is denoted by $R(X)$ and the set of end points of X is denoted by $E(X)$. For an arc or a simple closed curve, the set of ramification points is empty. In any other case we assume that each vertex of X , is either an end point of X or a ramification point of X . With this restriction the two end points of an edge of X may coincide in this case the edge is a simple closed curve. These kind of edges will be called *loops*. Thus, the edges of X are arcs or simple closed curves, and in X there are only three kind of edges: loops, edges that contain some end point of X , and edges joining ramification points. Two different vertices p and q of X are said to be adjacent provided that there is an edge J of X such that p and q are the end points of J .

We write $\dim(X)$ to denote the *dimension of the space X* ; and for $p \in X$, $\dim_p(X)$ stands for the *dimension of the space X at the point p* . First, define $\dim(X) = -1$ when $X = \emptyset$. Now, assume inductively that we have defined $\dim_p(X) \leq n - 1$ and $\dim(X) \leq n - 1$ for some integer $n \geq 0$. Then define $\dim_p(X) \leq n$ when p has arbitrarily small open neighborhoods in X whose boundaries have dimension less than or equal to $n - 1$, and define $\dim(X) \leq n$ when $\dim_p(X) \leq n$ for all $p \in X$. Now define $\dim_p(X) = n$ when $\dim_p(X) \leq n$

and $\dim_p(X) \not\leq n-1$, and define $\dim(X) = n$ when $\dim(X) \leq n$ and $\dim(X) \not\leq n-1$. Finally, define $\dim(X) = \infty$ when $\dim(X) \not\leq n$ for any integer n .

The next result is a consequence of [16, Theorem 7.1, p. 250].

Corollary 3.1. *Let X be a locally connected continuum such that X is not a finite graph and let $K \in 2^X$. If $X - \{x\}$ contains a subcontinuum without free arcs for some $x \in K$, then $C_K^n(X)$ contains a Hilbert cube.*

Lemma 3.2. *Let X be a continuum and $n \in \mathbb{N}$. If for each $K \in F_1(X)$, $C_n(X) \approx C_K^n(X)$, then X does not contain cut points.*

Proof. Let $p \in X$. Since $C_n(X)$ is homeomorphic to $C_{\{p\}}^n(X)$, by [16, Theorem 5.1, p. 245], $C_{\{p\}}^n(X)$ is colocally connected at each point. Thus $C_{n\{p\}}$ is not a cut point of $C_{\{p\}}^n(X)$ by Proposition 2.4. Then, by Corollary 2.3, p is not a cut point of X . \square

The next lemma, is a consequence of [23, Exercise 7.4, p. 36].

Lemma 3.3. *Let X be a continuum, $K \in 2^X$ and $n \in \mathbb{N}$. Then*

$$\dim(C_K^n(X)) = \dim(C_n(X) - C_{nK}(X)).$$

Given X a finite graph and $n \in \mathbb{N}$. Let $x \in X$. We consider

$$D_x^n = \{\dim_A(C_n(X)) : A \in \langle X - \{x\} \rangle_n\}.$$

Since X is a finite graph, by [15, Theorem 5.1, p. 270], $\dim_A(C_n(X)) < \infty$ for every $A \in C_n(X)$ and $\emptyset \neq D_x^n \subset \mathbb{N}$, let $\mathcal{O}_x^n = \max D_x^n$. Now, if $K \in 2^X$, define $M_K^n = \max\{\mathcal{O}_x^n : x \in K\}$ and we have the next lemma.

Lemma 3.4. *Let X be a finite graph and $n \in \mathbb{N}$. If $K \in 2^X$, then*

$$\dim(C_K^n(X)) = M_K^n \leq \dim(C_n(X)).$$

Proof. Let $A \in C_n(X) - C_{nK}(X)$. Since $K \not\subset A$, there exists $x \in K - A$ such that $A \subset X - \{x\}$. Thus $\dim_A(C_n(X)) \in D_x^n$. We have that $\dim_A(C_n(X)) \leq \mathcal{O}_x^n \leq M_K^n \leq \dim_X(C_n(X))$. On the other hand, assume that $\mathcal{O}_{x_0}^n = \max\{\mathcal{O}_x^n : x \in K\}$, then there exists $B \in \langle X - \{x_0\} \rangle_n$ such that $\mathcal{O}_{x_0}^n = \dim_B(C_n(X))$. Since $x_0 \in K$, $B \in C_n(X) - C_{nK}(X)$. Thus $\dim(C_K^n(X)) = M_K^n$, by Lemma 3.3. \square

The next corollary is a consequence of [19, Theorem 2.4, p. 791] and Lemma 3.4.

Corollary 3.5. *Let X be a finite graph and $n \in \mathbb{N}$.*

- (1) *If $K \subset R(X)$, then $\dim(C_K^n(X)) < \dim(C_n(X))$.*
- (2) *If $K \subset E(X)$, then $\dim(C_K^n(X)) = \dim(C_n(X))$.*

The following example shows what happens if $R(X)$ is contained in K . Let X be a continuum homeomorphic to the capital letter H . Without loss of generality, we may assume that

$$X = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\} \cup \\ \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}.$$

Let $p = (0, 0)$, $q = (1, 0)$, $r = (\frac{1}{2}, 0)$, $a_1 = (0, -1)$, $a_2 = (1, -1)$, $a_3 = (0, 1)$, $a_4 = (1, 1)$. Notice that $p, q \in R(X)$ and $a_1, a_2, a_3, a_4 \in E(X)$.

Example 3.6. *If X is homeomorphic to the capital letter H , then*

- a) $\dim(C_K^n(X)) < \dim(C_n(X))$ for $K = \{p, q, r\}$ and $n = 1$.
- b) $\dim(C_K^n(X)) = \dim(C_n(X))$ for $K = \{p, q, r\}$ and $n \geq 2$.
- c) $\dim(C_K^n(X)) = \dim(C_n(X))$ for $K = \{p, q, a_1\}$ and $n \geq 1$.

Proof. Notice that $D_p^n = D_q^n = \{2n, 2n + 1\}$ and $D_{a_1}^n = \{2n, 2n + 1, 2n + 2\}$ for every $n \geq 1$.

$$D_r^n = \begin{cases} \{3\} & \text{if } n = 1, \\ \{2n, 2n + 1, 2n + 2\} & \text{if } n \geq 2. \end{cases}$$

Thus $\mathcal{O}_p^n = \mathcal{O}_q^n = 2n + 1$ and $\mathcal{O}_{a_1}^n = 2n + 2$ for $n \geq 1$, and $\mathcal{O}_r^n = 3$, $\mathcal{O}_r^n = 2n + 2$ for $n = 1$ and $n \geq 2$, respectively. So that

$$M_{\{p, q, r\}}^n = \begin{cases} 3 & \text{if } n = 1, \\ 2n + 2 & \text{if } n \geq 2. \end{cases}$$

and $M_{\{p, q, a_1\}}^n = 2n + 2$ for $n \geq 1$. Therefore, if $K = \{p, q, r\}$, then $\dim(C_K^1(X)) = 3 < \dim(C(X))$ and $\dim(C_K^n(X)) = 2n + 2 = \dim(C_n(X))$ for every $n \geq 2$. And, if $K = \{p, q, a_1\}$, then $\dim(C_K^n(X)) = 2n + 2 = \dim(C_n(X))$ for every $n \geq 1$. \square

Given a continuum X , the set of cut points of X is denoted by $Cut(X)$. In the following, the set of subsets of $Cut(X)$ with only one point is denoted by $F_1(Cut(X))$, in the same way we denote $F_1(E(X))$.

Theorem 3.7. *Let X be a finite graph and $n \in \mathbb{N}$. If for each $K \in 2^X - F_1(Cut(X))$, $C_K^n(X) \approx C_n(X)$, then $|R(X)| \leq 1$.*

Proof. Suppose that $|R(X)| > 1$. Since X is a finite graph, we have that $R(X)$ is finite. Thus, for $K = R(X)$, $\dim(C_K^n(X)) < \dim(C_n(X))$ by (1) of Corollary 3.5. This is a contradiction. \square

Let Y a simple m -od with edges J_1, \dots, J_m and core v . Notice that

$$C(Y) = C_{\{v\}}(Y) \cup \left(\bigcup_{i=1}^m C(J_i) \right),$$

furthermore for each $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $C(J_i) \cap C(J_j) = \{\{v\}\}$ with $i \neq j$, $C_{\{v\}}(Y) \cap C(J_i) = C_{\{v\}}(J_i)$, and $C_{\{v\}}(Y) \cap \left(\bigcap_{i=1}^m C(J_i) \right) = \{\{v\}\}$.

A *tree* is a finite graph without simple closed curves.

Corollary 3.8. *Let X be a tree and $n \in \mathbb{N}$. If for each $K \in 2^X - F_1(\text{Cut}(X))$, $C_K^n(X) \approx C_n(X)$, then X is an arc or a simple m -od.*

Proof. By Theorem 3.7, $|R(X)| \leq 1$. If X has a ramification point, then X is a simple m -od for some $m \in \mathbb{N}$. On the other hand, if $\text{ord}_X(p) \leq 2$ for every $p \in X$, since X is a tree, then X is an arc by [22, Proposition 9.5, p. 142]. \square

Given a topological space Y , the *cone over Y* , which we denote by $\text{Cone}(Y)$, is the quotient space $Y \times [0, 1]/Y \times \{1\}$ obtained from $Y \times [0, 1]$ by shrinking $Y \times \{1\}$ to a point. The point $Y \times \{1\}$ of $\text{Cone}(Y)$ is called the *vertex of $\text{Cone}(Y)$* ; the subset $Y \times \{0\}$ of $\text{Cone}(Y)$ is called the *base of $\text{Cone}(Y)$* . Denote by v_Y and $B(Y)$ the vertex and the base of $\text{Cone}(Y)$, respectively. The *suspension over Y* , which we denote by $\Sigma(Y)$, is the quotient space obtained from $Y \times [-1, 1]$ by shrinking $Y \times \{-1\}$ and $Y \times \{1\}$ to (different) points which are called *vertices of $\Sigma(Y)$* . Denote by v_{-1} and v_1 the vertices of $\Sigma(Y)$.

As consequence of the proof of [1, Theorem 5.5, p. 356] we have the next proposition.

Proposition 3.9. *Let $n \in \mathbb{N}$. Suppose that $X = \text{Cone}(Y)$ for some compact metric space Y . Then $C_n(X)$ is homeomorphic to $\text{Cone}(Z)$ where $Z = \bigcup_{p \in B(Y)} C_{n_{\{p\}}}(X)$.*

Theorem 3.10. *Assume that X is an arc or a simple m -od. If $K \in F_1(E(X))$, then $C_K^1(X)$ is homeomorphic to $C(X)$.*

Proof. Suppose that $X = I$, by [12, Exercise 14.24, p. 118] $C_K(X)$ is an arc, and $C(X) - C_K(X)$ is homeomorphic to $[0, 1] \times [0, 1)$. Thus $C_K^1(X)$ is homeomorphic to $C(X)$.

Now, suppose that for some $m \in \mathbb{N}$, X is a simple m -od with edges J_1, \dots, J_m . Assume that $K = \{e\}$ where $e \in J_1$, notice that $C_K(X) = C_{\{e\}}(J_1) \cup C_{J_1}(X)$ and $C_{\{e\}}(J_1) \cap C_{J_1}(X) = \{J_1\}$. By Proposition 3.9, $C(X)$ is homeomorphic to $\text{Cone}(Z)$ where

$$Z = \bigcup_{p \in E(X)} C_{\{p\}}(X).$$

On the other hand, we have that $C_{\{e\}}(J_1)$ is an arc in $C(J_1)$ by [12, Exercise 14.24, p. 118], $C_{\{v\}}(X)$ is a m -cell, see [14, Theorem 3 and Theorem 4, p. 3071], where v is the core of X , and by [8, 5.2, p. 271] $C_{J_1}(X)$ is a $(m - 1)$ -cell in

$C_{\{v\}}(X)$. Notice that $C_{J_1}(X) \cap C(J_i) = \emptyset$ for each $i \neq 1$. Since $C(J_1)/C_{\{e\}}(J_1)$ is homeomorphic to $C(J_1)$, and $C_{\{v\}}(X)/C_{J_1}(X)$ is homeomorphic to $C_{\{v\}}(X)$. Then $C_K^1(X)$ is homeomorphic to $C(X)$. \square

As consequence of Proposition 3.9, we have the following result.

Corollary 3.11. *Let $n \in \mathbb{N}$. $C_K^n(I)$ is homeomorphic to $\Sigma(C_{n_K}(I))$ for $K \in \{\{0\}, \{1\}\}$.*

Proof. We only prove for $K = \{0\}$. Since $I \approx \text{Cone}(\{0\})$, by Proposition 3.9 there exists a homeomorphism $h : C_n(I) \rightarrow \text{Cone}(Z)$ where $Z = C_{n_K}(I)$. Notice that $\pi_K : C_n(I) \rightarrow C_K^n(I)$ and $q : \text{Cone}(Z) \rightarrow \text{Cone}(Z)/B(Z)$ are quotient maps. Since the following diagram is commutative

$$\begin{array}{ccc} & h & \\ C_n(I) & \rightarrow & \text{Cone}(Z) \\ \pi_K \downarrow & & \downarrow q \\ C_K^n(I) & \rightarrow & \text{Cone}(Z)/B(Z) \approx \Sigma(Z) \end{array}$$

The fact that $C_K^n(I)$ is homeomorphic to $\Sigma(C_{n_K}(I))$ follows from the Transgression Lemma, see [22, Exercise 3.22, p. 45]. \square

Theorem 3.12. *Let X be a finite graph and $n \in \mathbb{N}$. If for every $K \in 2^X$, $C_n(X)$ is homeomorphic to $C_K^n(X)$, then X is a simple closed curve.*

Proof. Since $C_n(X) \approx C_K^n(X)$, by Theorem 3.7, $|R(X)| \leq 1$ and by Lemma 3.2 X does not contain cut points. Suppose that $R(X) = \{p\}$. Since p is the only ramification point of X , p is a cut point of X . This is a contradiction. Thus $R(X) = \emptyset$.

Since X is a finite graph and $\text{ord}_X(x) \leq 2$ for every $x \in X$, then X is an arc or a simple closed curve, by [22, Proposition 9.5, p. 142]. But X does not contain cut points, then X is not an arc. Therefore X is a simple closed curve. \square

To finish this section we focus on case $n = 1$ in the class of finite graphs.

Theorem 3.13. *If X is finite graph, $C_K^1(X)$ is homeomorphic to $\text{Cone}(X)$ if only if*

- (1) $X = I$ and $K \in 2^X - F_1((0, 1))$, or,
- (2) $X = S^1$ and $K \in 2^X$.

Proof. Assume that $h : \text{Cone}(X) \rightarrow C_K^1(X)$ is a homeomorphism. Since X is a finite graph, $\dim(\text{Cone}(X)) = 2$. Thus $\dim(C_K^1(X)) = 2$. Notice that for every $y \in \text{Cone}(X)$, y is not a cut point. Then $h(y)$ is not a cut point in $C_K^1(X)$, in particular C_K is not a cut point in $C_K^1(X)$.

Suppose that $K = \{z\}$ for some $z \in X$, since C_K is not a cut point in $C_K^1(X)$ and by Corollary 2.3, z is not a cut point in X . Then z is an end point or z belongs to one simple closed curve in X .

On the other hand, suppose that $K \in 2^X$ such that $|K| \geq 2$. Let $C \in C(X)$ such

that $K \subset C$. Assume that $X - C$ or C have a ramification point, p . If $p \in X - C$, since X is a finite graph, there exists $C_p \in C(X)$ such that $p \in C_p \subset X - C$ and $\dim_{C_p}(C(X)) \geq 3$. Moreover, $C_p \notin C_K(X)$, thus $h^{-1}(C_p) \in \text{Cone}(X)$ this is a contradiction because $\dim(\text{Cone}(X)) = 2$.

Now, if $p \in C$, there exists $q \in K$ such that $p \neq q$. Since X is metric space there are disjoint open sets U and V such that $p \in U$ and $q \in V$. By locally connetedness, there is $C_p \in C(X)$ such that $p \in C_p \subset U$. Notice that $K \not\subset C_p$, thus $C_p \notin C_K(X)$ and $\dim_{C_p}(C(X)) \geq 3$. This is a contradiction. Then X does not contain ramification points.

By both cases and [12, Proposition 9.5, p. 142], we have that X is the arc I or S^1 .

To converse, let $X = I$ and $K \in 2^X - F_1((0, 1))$, suppose that $K = \{0\}$ or $K = \{1\}$, by [12, Exercise 14.24, p. 118] $C_K(X)$ is an arc, and $C(X) - C_K(X)$ is homeomorphic to $[0, 1] \times [0, 1)$. Thus $C_K^1(X)$ is homeomorphic to $\text{Cone}(X)$. If $K \in 2^X - F_1(X)$, let $a = \min K$ and $b = \max K$, notice that $a \neq b$. First, assume that $a = 0$ or $b = 1$. Notice that $C_K(X)$ is an arc by [12, Exercise 14.24, p. 118], then $C_K^1(X)$ is homeomorphic to $\text{Cone}(X)$. Now, assume that $a \neq 0$ and $b \neq 1$, Then $C(X) - C_K(X) = C([0, b]) \cup C((a, 1])$ which is homeomorphic to $[0, 1] \times [0, 1)$. Thus $C_K^1(X)$ is homeomorphic to $\text{Cone}(X)$.

Finally, let $X = S^1$ and $K \in 2^X$. If $K \in F_1(X)$, by [11, Ejemplo 3.2, p. 31] $C_K(X)$ is homeomorphic to a 2-cell in $C(X)$. Thus $C_K^1(X)$ is homeomorphic to a 2-cell which is homeomorphic to $\text{Cone}(X)$. In the other case, by Theorem 6.3 $C_K(X)$ is contractible in $C(X)$ such that $C_K(X) \cap F_1(X) = \emptyset$. Then $C(X) - C_K(X)$ is homeomorphic to $S^1 \times [0, 1)$. Thus $C_K^1(X)$ is homeomorphic to $\text{Cone}(X)$. \square

As consequence of [12, Example 5.2, p. 35] we have the following result.

Corollary 3.14. *For each $K, L \in 2^{S^1}$, $C_K^1(S^1)$ is homeomorphic to $C_L^1(S^1)$. Moreover, $C_K^1(S^1)$ is homeomorphic to $C_1(S^1)$.*

4. APOSYNDEISIS

In this section we show that for every $n \in \mathbb{N}$, $C_K^n(X)$ is finitely aposyndetic for some $K \in 2^X$.

Theorem 4.1. *Let X be a continuum and $n \in \mathbb{N}$. If $K \in 2^X$, then $C_K^n(X)$ is colocally connected in \mathcal{A} for every $\mathcal{A} \in C_K^n(X) - \{C_{n_K}\}$.*

Proof. Let $\mathcal{A} \in C_K^n(X) - \{C_{n_K}\}$ and let $A \in C_n(X)$ such that $\pi_K(A) = \mathcal{A}$. Notice that $A \notin C_{n_K}(X)$. By [16, Theorem 5.1 p. 246], there exists a local base $\{V_\alpha\}$ of open subsets of A whose complements are connected. We may assume that $V_\alpha \subset C_n(X) - C_{n_K}(X)$ for all α . By Remark 1.2, $\{\pi_K(V_\alpha)\}$ is a local base of open subsets of \mathcal{A} . Since $\pi_K(C_n(X) - V_\alpha) = C_K^n(X) - \pi_K(V_\alpha)$ is connected, $C_K^n(X)$ is colocally connected in \mathcal{A} . \square

Let $p, q \in X$, $p \neq q$. X is *aposyndetic at p with respect to q* provided that there exists a continuum M such that $p \in \text{Int}_X(M)$ and $q \in X - M$. If for each $q \in X - \{p\}$, X is aposyndetic at p with respect to q , then X is *aposyndetic at p* . If X is aposyndetic at each of its points then X is *aposyndetic*. X is *finitely aposyndetic* provided that for each finite subset F of X and point x of X not in F , there exists a subcontinuum W of X such that $x \in \text{Int}_X(W) \subset W \subset X - F$.

Lemma 4.2. *Let $n \in \mathbb{N}$. If X is a continuum and $K \in 2^X$. Then*

- (1) $C_K^n(X)$ is aposyndetic at C_{n_K} .
- (2) $C_K^n(X)$ is aposyndetic at $\mathcal{A} \neq C_{n_K}$ with respect to any $\mathcal{B} \neq C_{n_K}$.

Proof. 1) Let $\mathcal{A} \in C_K^n(X)$, $\mathcal{A} \neq C_{n_K}$. Since $C_K^n(X)$ is a Hausdorff space, there exist \mathfrak{U} and \mathfrak{V} disjoint open subsets such that $\mathcal{A} \in \mathfrak{U}$ and $C_{n_K} \in \mathfrak{V}$. Let $A, B \in C_n(X)$ such that $\pi_K(A) = \mathcal{A}$ and $\pi_K(B) = C_{n_K}$. Then $\pi_K^{-1}(\mathfrak{U})$ is an open subset in $C_n(X)$ containing A and $\pi_K^{-1}(\mathfrak{U}) \cap C_{n_K}(X) = \emptyset$. Since $C_n(X)$ is collocally connected by [16, Corollary 5.1, p. 246]. There is an open subset \mathcal{U}_A such that $A \in \mathcal{U}_A \subset \pi_K^{-1}(\mathfrak{U})$ and $C_n(X) - \mathcal{U}_A$ is a continuum. Notice that $C_{n_K}(X) \subset C_n(X) - \mathcal{U}_A$, thus $C_{n_K} \in \mathfrak{V} \subset \pi_K(C_n(X) - \mathcal{U}_A)$. Then $C_K^n(X)$ is aposyndetic at C_{n_K} .

2) Let $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in C_K^n(X)$, $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$. Assume that \mathcal{A} and \mathcal{B} are different from C_{n_K} . Let $A, B \in C_n(X)$ such that $\pi_K(A) = \mathcal{A}$ and $\pi_K(B) = \mathcal{B}$. Since $C_K^n(X)$ is a Hausdorff space, there exist \mathfrak{U} and \mathfrak{V} disjoint open subsets containing \mathcal{A} and \mathcal{B} , respectively. Thus $\pi_K^{-1}(\mathfrak{V})$ is an open subset containing B . Since $C_n(X)$ is collocally connected, there is \mathcal{V}_B an open subset such that $B \in \mathcal{V}_B \subset \pi_K^{-1}(\mathfrak{V})$ and $\mathcal{W} = C_n(X) - \mathcal{V}_B$ is a continuum, moreover $A \in \pi_K^{-1}(\mathfrak{U}) \subset \mathcal{W}$. Then $\pi_K(\mathcal{W})$ is a continuum in $C_K^n(X) - \{\mathcal{B}\}$ such that $\mathcal{A} \in \text{Int}_{C_K^n(X)}(\pi_K(\mathcal{W})) \subset \pi_K(\mathcal{W})$. \square

Theorem 4.3. *If X is a continuum and $n \in \mathbb{N}$, then $C_K^n(X)$ is aposyndetic for each $K \in 2^X - F_1(X)$.*

Proof. Let $\mathcal{A} \in C_K^n(X)$. By Lemma 4.2, we prove that $C_K^n(X)$ is aposyndetic at \mathcal{A} with respect to C_{n_K} . Let $A \in C_n(X)$ such that $\pi_K(A) = \mathcal{A}$. Since $\mathcal{A} \neq C_{n_K}$, $K \not\subset A$ and there exists $k_0 \in K - A$. We consider $A_0 = \{k_0\}$ and $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$ where A_i is a component of A for every $i = 1, \dots, m$ with $1 \leq m \leq n$. Since X is a metric space, **1)** holds:

1) For each $i = 0, \dots, m$ there exists \mathcal{W}_i an open subset of X such that $A_i \subset \mathcal{W}_i$, and $\text{Cl}_X(\mathcal{W}_i) \cap \text{Cl}_X(\mathcal{W}_j) = \emptyset$ for every $i, j \in \{0, \dots, m\}$ and $i \neq j$. In consequence **2)**:

2) $A \in \mathcal{U} = \langle W_1, \dots, W_m \rangle_n$ and $\text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{U}) \cap C_{n_K}(X) = \emptyset$.

3) If \mathcal{D} is a component of \mathcal{U} , then $\mathcal{D} \cap F_n(X) \neq \emptyset$. Moreover, $F_n(X) \cap \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{U}) \neq \emptyset$.

To prove **3)**, since \mathcal{D} is a connected subset of $C_n(X)$, by [10, Lemma 1, p. 1578], $D_0 = \bigcup \{A : A \in \mathcal{D}\}$ has at most n components, we may suppose that $D_0 = D_1 \cup \dots \cup D_l$ with $1 \leq l \leq n$. Thus, $\{d_1, \dots, d_l\} \in \mathcal{D} \cap F_n(X)$ where

$d_i \in D_i$ for every $i = 1, \dots, l$. Notice that D_i is a component of W_{j_i} for some $j_i \in \{1, \dots, m\}$. By [22, Theorem 5.6, p. 74], for every $i \in \{1, \dots, l\}$ there exists $d_i \in \text{Cl}_X(D_i) \cap \text{Bd}(W_{j_i})$. We conclude **4)**,

4) There exists $\{d_1, \dots, d_l\} \in \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{D})$ such that for each $i = 1, \dots, l$ there exists $j \in \{1, \dots, m\}$ with $d_i \in \text{Bd}(W_j)$.

The proof of **5)** and **6)** below, is consequence of **4)** and the proof of Theorem 5.2 of [5].

5) Suppose that $K \in F_n(X)$. For each \mathcal{D} there exists $M_{\mathcal{D}}$ a subcontinuum of $F_n(X) - F_{n_K}(X)$ such that $M_{\mathcal{D}} \cap F_1(X) \neq \emptyset$ and $\{d_1, \dots, d_l\} \in M_{\mathcal{D}}$.

6) $M = \text{Cl}_{C_n(X)}(\bigcup\{M_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \text{ is component of } \mathcal{U}\}) \cup F_1(X)$ is a subcontinuum of $F_n(X) - F_{n_K}(X)$.

Now, if $K \notin F_n(X)$, $F_n(X) \cap C_{n_K}(X) = \emptyset$. By **2)** and **3)** $\mathcal{C} = \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{U}) \cup F_n(X)$ is a subcontinuum of $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ such that $A \in \text{Int}_{C_n(X)}(\mathcal{C})$.

Otherwise, by **6)** $\mathcal{C} = \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{U}) \cup M$ is a subcontinuum of $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ such that $A \in \text{Int}_{C_n(X)}(\mathcal{C})$. Therefore, $C_K^n(X)$ is aposyndetic at \mathcal{A} with respect to C_{n_K} . \square

By Theorem 2.1, Theorem 4.3 and [3, Corollary 1, p. 586] we have the next result.

Corollary 4.4. *Let $n \in \mathbb{N}$. If X is a continuum and $K \in 2^X - F_1(X)$, then $C_K^n(X)$ is finitely aposyndetic.*

Theorem 4.5. *Let X be a continuum and $n \in \mathbb{N}$. Then X is aposyndetic if and only if $C_K^n(X)$ is aposyndetic for each $K \in F_1(X)$.*

Proof. Let $K \in F_1(X)$. By Lemma 4.2, we prove that $C_K^n(X)$ is aposyndetic at $\mathcal{A} \in C_K^n(X) - \{C_{n_K}\}$ with respect to C_{n_K} . Let $A \in C_n(X)$ such that $\pi_K(A) = \mathcal{A}$, suppose that $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$ where $A_i \in C(X)$ for each $i = 1, \dots, m$ and $m \leq n$. Assume that $K = \{x_0\}$ for some $x_0 \in X$. Since $A \notin C_{n_K}(X)$, then $A_i \subset X - \{x_0\}$ for every $i = 1, \dots, m$. Let $i \in \{1, \dots, m\}$ and let $a \in A_i$, since X is aposyndetic, there exists M_a^i a subcontinuum of X such that $a \in \text{Int}_X(M_a^i) \subset M_a^i \subset X - \{x_0\}$. Then $\mathcal{C}_i = \{\text{Int}(M_a^i) : a \in A_i\}$ is an open cover of A_i . Since A_i is compact, there exists $l_i \in \mathbb{N}$ such that $A_i \subset \bigcup_{j=1}^{l_i} \text{Int}_X(M_{a_j}^i)$.

For each $i = 1, \dots, m$, let $U_i = \bigcup_{j=1}^{l_i} \text{Int}_X(M_{a_j}^i)$, notice that $U_i \subset X - \{x_0\}$ and $A \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle_n$. Thus $\mathcal{W} = \text{Cl}(\langle U_1, \dots, U_m \rangle_n)$ is a subcontinuum of $C_n(X) - C_{n_K}(X)$. Then $\pi_K(\mathcal{W})$ is a subcontinuum of $C_K^n(X) - \{C_{n_K}\}$ such that $\mathcal{A} \in \text{Int}_{C_K^n(X)}(\pi_K(\mathcal{W}))$. Therefore $C_K^n(X)$ is aposyndetic at \mathcal{A} .

To converse, let $p, q \in X$ with $p \neq q$. We may assume that $K = \{q\}$. Since $C_K^n(X)$ is aposyndetic, there exist a continuum \mathfrak{W} in $C_K^n(X)$ such that $\mathcal{P} = \pi_K(\{p\}) \in \text{Int}_{C_K^n(X)}(\mathfrak{W})$ and $C_{n_K} \in C_K^n(X) - \mathfrak{W}$. Then $\pi_K^{-1}(\mathfrak{W})$ is a continuum in $C_n(X) - C_{n_K}(X)$. Notice that $\{p\} \in \pi_K^{-1}(\mathfrak{W})$. By [10, Lemma 1, p. 1578], $M = \bigcup \pi_K^{-1}(\mathfrak{W})$ is a continuum in X such that $p \in \text{Int}_X(M)$. Since $\pi_K^{-1}(\mathfrak{W}) \subset C_n(X) - C_{n_K}(X)$, then $q \notin M$. Thus X is aposyndetic at p for every $p \in X$. \square

As consequence of Theorem 4.3 and Theorem 4.5 we conclude the following result.

Corollary 4.6. *Let X be a continuum and $n \in \mathbb{N}$. Then X is aposyndetic if and only if $C_K^n(X)$ is aposyndetic for each $K \in 2^X$.*

Let $\Sigma(Z)$ be the suspension over Z where $Z = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$. Denote by v_1, v_{-1} the vertices of $\Sigma(Z)$, $L_0 = \{0\} \times (-1, 1)$ and $p = (0, 0)$. Now, Y is obtained by identifying in $\Sigma(Z)$, v_1, v_{-1} to one point denoted by v . Notice that Y is a continuum not aposyndetic at $x \in L_0$.

Example 4.7. *The continuum Y is not aposyndetic and $C_K^n(Y)$ is aposyndetic for $K = \{p\}$ and $C_L^n(Y)$ is not aposyndetic for $L = \{v\}$.*

Proof. Let $n \in \mathbb{N}$ and $K = \{p\}$. By Lemma 4.2 we prove that $C_K^n(Y)$ is aposyndetic at \mathcal{A} with respect to C_{n_K} . Let $A \in C_n(X)$ such that $\pi_K(A) = \mathcal{A}$. Notice that Y is colocally connected in p . Since $\mathcal{A} \neq C_{n_K}$, $p \notin A$. There exists U an open subset such that $p \in U \subset \text{Cl}_Y(U) \subset Y - A$ and $Y - U$ is a continuum. Thus $\langle Y - U \rangle_n$ is a continuum in $C_n(Y) - C_{n_K}(Y)$ such that $A \in \langle Y - \text{Cl}_Y(U) \rangle_n \subset \langle Y - U \rangle_n$. Therefore $C_K^n(Y)$ is aposyndetic.

Now, we prove that $C_L^n(Y)$ is not aposyndetic at $\mathcal{P} = \pi_L(\{p\})$ with respect to C_{n_L} . Let \mathfrak{W} be a continuum such that $\mathcal{P} \in \text{Int}_{C_L^n(Y)}(\mathfrak{W})$. Suppose that $C_{n_L} \not\subset \mathfrak{W}$, then $\pi_L^{-1}(\mathfrak{W})$ is a continuum in $C_n(Y) - C_{n_L}(Y)$. Notice that $\{p\} \in \pi_L^{-1}(\mathfrak{W})$. By [10, Lemma 1, p. 1578], $M = \bigcup \pi_L^{-1}(\mathfrak{W})$ is a continuum in Y such that $p \in \text{Int}_Y(M)$. Then $v \in M$, this a contradiction. Therefore $C_L^n(Y)$ is not aposyndetic. \square

5. CONNECTEDNESS AND ARCWISE DISCONNECTEDNESS

Theorem 5.1. *If X is a continuum and $n \in \mathbb{N}$, then $C_K^n(X)$ is an arcwise connected continuum for each $K \in 2^X$.*

Proof. Let $K \in 2^X$. Since $C_n(X)$ is an arcwise connected continuum by [16, Theorem 3.1, p. 240], and π_K is a map, we have that $C_K^n(X)$ is an arcwise connected continuum. \square

Lemma 5.2. *Let X be a continuum, $K \in 2^X$ and $n \in \mathbb{N}$. If $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ is locally connected, then X is locally connected.*

Proof. Let $x \in X$. Suppose that $x \notin K$, let V be an open subset of X such that $x \in V$. Thus $W = V \cap (X - K)$ is an open subset of X containing x , then $\{x\} \in \langle W \rangle_n \subset C_n(X) - C_{n_K}(X)$. Since $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ is locally connected, there exists an open connected subset \mathcal{U} of $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ such that $\{x\} \in \mathcal{U} \subset \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{U}) \subset \langle W \rangle_n$. Let $\epsilon > 0$ be such that $B_\epsilon^H(\{x\}) \cap C_n(X) \subset \mathcal{U}$. Let $H = \bigcup \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{U})$. Then, by [20, Lemma 1.49, p. 102] H is a subcontinuum of X . Notice that $x \in H \subset W \subset V$. Let $y \in B_\epsilon(x)$, $\{y\} \in B_\epsilon^H(\{x\}) \cap C_n(X) \subset \mathcal{U}$. Thus $\{y\} \in \mathcal{U}$ and $y \in H$. Then $x \in \text{Int}_X(H) \subset W \subset V$.

Now, suppose that $x \in K$ and $K \notin F_1(X)$, then there exists $z \in K$ such that $z \neq x$. Let V be an open subset of X such that $x \in V$. Since $W = V \cap (X - \{z\})$ is an open subset of X containing x and $\{x\} \in \langle W \rangle_n \subset C_n(X) - C_{n_K}(X)$, we proceed as before.

Finally, if $\{x\} = K$, by [22, Corollary 5.13, p. 78] and the previous argument, X cannot be connected im kleinen at only one point. Then, we have that X is connected im kleinen at each of its points. Therefore, X is locally connected. \square

Theorem 5.3. *Let $n \in \mathbb{N}$ and let $K \in 2^X$. Then, X is a Peano continuum if only if $C_K^n(X)$ is a Peano continuum.*

Proof. If X is locally connected, by [16, Theorem 3.2, p. 240] $C_n(X)$ is locally connected. By [22, Proposition 3.7, p. 39] π_K is a closed map. Then $C_K^n(X)$ is locally connected by [22, Proposition 8.16, p. 127].

Now, suppose that $C_K^n(X)$ is locally connected, then $C_K^n(X) - \{C_{n_K}\}$ is locally connected. Thus, by Remark 1.2 $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ is locally connected. By Lemma 5.2, X is locally connected. \square

The next result is consequence of Theorem 5.3.

Corollary 5.4. *Let X be a continuum. Then the following are equivalent:*

- (1) X is a Peano continuum,
- (2) $C_K^n(X)$ is a Peano continuum for every $n \in \mathbb{N}$ and every $K \in 2^X$,
- (3) $C_K^n(X)$ is a Peano continuum for some $n \in \mathbb{N}$ and every $K \in 2^X$,
- (4) $C_K^n(X)$ is a Peano continuum for every $n \in \mathbb{N}$ and some $K \in 2^X$,
- (5) $C_K^n(X)$ is a Peano continuum for some $n \in \mathbb{N}$ and some $K \in 2^X$.

Theorem 5.5. *Let X be a continuum and $n \in \mathbb{N}$. If $K \in 2^X - F_1(X)$, then $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ is connected.*

Proof. Let $K \in 2^X - F_1(X)$. Notice that $C_{n_K}(X) \cap F_1(X) = \emptyset$. Let $A \in C_n(X) - C_{n_K}(X)$. Suppose that $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$. Let $a_i \in A_i$ for each $i \in \{1, \dots, m\}$. There exists $\alpha : [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ an order arc such that $\alpha(0) = \{a_1, \dots, a_m\}$, $\alpha(1) = A$. Since $K \not\subset A$, there exists $k_0 \in K - A$ and $K \not\subset \alpha(t)$ for every $t \in [0, 1]$. Assume that $a_1 \in K \cap \alpha(0)$. For every $i \in \{1, \dots, m-1\}$ let $\gamma_i : X \rightarrow C_n(X)$ given by $\gamma_i(x) = \{x\} \cup (\alpha(0) - \{a_1, \dots, a_i\})$. γ_i is well defined and is a map. Let $\Gamma_i = \gamma_i(X)$. Notice that $\{k_0, a_1\} \not\subset \gamma_i(x)$ for every $i \in \{1, \dots, m-1\}$ and every $x \in X$. Thus Γ_i is a connected subset in $C_n(X) - C_{n_K}(X)$. Since $\alpha(0) - \{a_1, \dots, a_{i-1}\} \in \Gamma_{i-1} \cap \Gamma_i$ for every $i \in \{2, \dots, m-1\}$, then $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{m-1} \Gamma_i$ is a connected subset containing $\alpha(0)$ and $\{a_m\}$. Thus $A \in \alpha([0, 1]) \cup \Gamma \cup F_1(X)$ which is connected in $C_n(X) - C_{n_K}(X)$. Therefore, $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ is connected. \square

Now, we study when a point arcwise disconnectedness to $C_K^n(X)$.

Theorem 5.6. *Let X be a continuum, $n \in \mathbb{N}$ and let $K \in 2^X$. If $A \in C(X) - C_K(X)$ then $C_K^n(X) - \pi_K(C_n(A))$ is arcwise connected.*

Proof. Since $A \in C(X) - C_K(X)$, by [16, Theorem 6.1, p. 246] $C_n(X) - C_n(A)$ is arcwise connected. Then $\pi_K(C_n(X) - C_n(A)) = C_K^n(X) - \pi_K(C_n(A))$ is arcwise connected. \square

Theorem 5.7. *Let X be a continuum, $n \in \mathbb{N}$ and $K \in 2^X$ be given. If $\mathcal{A} \in C_K^n(X) - \{C_{n_K}\}$ is such that $C_K^n(X) - \{\mathcal{A}\}$ is not arcwise connected then $\pi_K^{-1}(\mathcal{A})$ is connected.*

Proof. Let $\mathcal{A} \in C_K^n(X) - \{C_{n_K}\}$. Then $\pi_K^{-1}(\mathcal{A}) \in C_n(X)$. Since $\pi_K^{-1}(C_K^n(X) - \{\mathcal{A}\}) = C_n(X) - \{\pi_K^{-1}(\mathcal{A})\}$ and $C_K^n(X) - \{\mathcal{A}\}$ is not arcwise connected, $C_n(X) - \{\pi_K^{-1}(\mathcal{A})\}$ is not arcwise connected. Thus, by [16, Theorem 6.2, p. 246], $\pi_K^{-1}(\mathcal{A})$ is connected. \square

Theorem 5.8. *A nondegenerate continuum X is indecomposable if and only if for each $n \in \mathbb{N}$, $C_K^n(X) - \{C_{n_K}\}$ is not arcwise connected for every $K \in 2^X$.*

Proof. Let $K \in 2^X$. Let x and y be points in different components of X . Since X is an indecomposable continuum, for any function $\alpha : [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ such that $\alpha(0) = \{x\}$ and $\alpha(1) = \{y\}$, exists $t_0 \in [0, 1]$ such that $K \subset \alpha(t_0)$. Then $\alpha(t_0) \in C_{n_K}(X)$. Thus $\alpha([0, 1]) \not\subset C_n(X) - C_{n_K}(X)$. By Remark 1.2, we conclude that $C_K^n(X) - \{C_{n_K}\}$ is not arcwise connected.

Conversely, assume X is decomposable. Let X_1 and X_2 be proper subcontinua of X such that $X = X_1 \cup X_2$. Let $r \in X_1 - X_2$ and $q \in X_2 - X_1$. By Remark 1.2, it is enough to prove that $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ is arcwise connected for $K = \{r, q\}$. Consider $p \in X_1 \cap X_2$, notice that $\{p\} \in C_n(X) - C_{n_K}(X)$. Now, let $A \in C_n(X) - C_{n_K}(X)$. Suppose that $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$ where $A_i \in C(X)$ for each $i = 1, \dots, m$, without loss of generality we may assume that there exist $1 \leq s \leq t \leq m$ such that:

- a) $A_l \subset X_1$ where $1 \leq l \leq s$,
- b) $A_l \subset X_2$ where $s + 1 \leq l \leq t$, and
- c) $A_l \cap (X_1 \cap X_2) \neq \emptyset$ and $A_l \not\subset X_i$ for every $i = 1, 2$ where $t + 1 \leq l \leq m$.

In the case a), we will construct an arc from A to $\{p\} \cup (\bigcup_{i=s+1}^m A_i)$. Since $C_s(X_1)$ is arcwise connected and $A_1 \cup \dots \cup A_s, \{p\} \in C_s(X_1)$, there exists an arc $\alpha : [0, 1] \rightarrow C_s(X_1)$ such that $\alpha(0) = A_1 \cup \dots \cup A_s$ and $\alpha(1) = \{p\}$. Now, define a function $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ by $\gamma_1(t) = \alpha(t) \cup (\bigcup_{i=s+1}^m A_i)$. Then γ_1 is well defined and is a map. Since $q \notin X_1$, $K \not\subset \gamma_1(t)$ for every $t \in [0, 1]$. Thus $\mathcal{A}_1 = \gamma_1([0, 1])$ is an arc such that $\mathcal{A}_1 \subset C_n(X) - C_{n_K}(X)$ containing A and $\{p\} \cup (\bigcup_{i=s+1}^m A_i)$.

For case b), we will construct an arc from $\{p\} \cup (\bigcup_{i=s+1}^m A_i)$ to $\{p\} \cup (\bigcup_{i=t+1}^m A_i)$. Since $C_{t-s}(X_2)$ is arcwise connected and $A_{s+1} \cup \dots \cup A_t, \{p\} \in C_{t-s}(X_2)$, there exists an arc $\beta : [0, 1] \rightarrow C_{t-s}(X_2)$ such that $\beta(0) = A_{s+1} \cup \dots \cup A_t$ and $\beta(1) = \{p\}$. Define $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ by $\gamma_2(t) = \beta(t) \cup \{p\} \cup (\bigcup_{i=t+1}^m A_i)$. Then γ_2 is well defined and is a map. Moreover $K \not\subset \gamma_2(t)$ for every $t \in [0, 1]$. Thus $\mathcal{A}_2 = \gamma_2([0, 1])$ is an arc such that $\mathcal{A}_2 \subset C_n(X) - C_{n_K}(X)$ containing

$\{p\} \cup (\bigcup_{i=s+1}^m A_i)$ and $\{p\} \cup (\bigcup_{i=t+1}^m A_i)$.

Notice that $\{p\} \cup \bigcup_{i=s+1}^m A_i \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, then $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \subset C_n(X) - C_{n_K}(X)$ is arcwise connected.

In the case c), we will construct an arc from $\{p\}$ to $\{p\} \cup (\bigcup_{i=t+1}^m A_i)$. For each $j \in \{t+1, \dots, m\}$ we choose $a_j \in A_j \cap X_1$. There exists $\eta : [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ an order arc such that $\eta(0) = \{a_{t+1}, \dots, a_m\}$ and $\eta(1) = A_{t+1} \cup \dots \cup A_m$. Notice that $K \not\subset \eta(t)$ for every $t \in [0, 1]$. Since $C_{m-t}(X_1)$ is arcwise connected and $\{a_{t+1}, \dots, a_m\}, \{p\} \in C_{m-t}(X_1)$, there exists an arc $\eta_0 : [0, 1] \rightarrow C_{m-t}(X_1)$ such that $\eta_0(1) = \{a_{t+1}, \dots, a_m\}$ and $\eta_0(0) = \{p\}$. Now, define $\gamma_3 : [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ by

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} \eta_0(2t) \cup \{p\}, & \text{if } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \eta(2t-1) \cup \{p\}, & \text{if } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Then γ_3 is well defined and is a map. Moreover $K \not\subset \gamma_3(t)$ for every $t \in [0, 1]$. Thus $\mathcal{A}_3 = \gamma_3([0, 1])$ is an arc such that $\mathcal{A}_3 \subset C_n(X) - C_{n_K}(X)$ containing $\{p\}$ and $\{p\} \cup (\bigcup_{i=t+1}^m A_i)$.

Notice that $\{p\} \cup (\bigcup_{i=t+1}^m A_i) \in \mathcal{A}_3 \cap (\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$, then $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$ is arcwise connected and $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \subset C_n(X) - C_{n_K}(X)$.

Now, if $K \cap A = \emptyset$, then $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$ is a subcontinuum arcwise connected of $C_n(X) - C_{n_K}(X)$ containing $\{p\}$ and A . But, if $A \cap K \neq \emptyset$, then exists $j \in \{1, \dots, m\}$ such that $A_j \cap K \neq \emptyset$. Since $K \not\subset A$, we may assume that $r \in A_j$. Thus, without loss of generality we may assume that $j = 1$, or, $j = t + 1$. If $j = 1$, we construct $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ and \mathcal{A}_3 as before. And, for $j = t + 1$, we construct $\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1$, and \mathcal{A}_2 to avoid containing K . \square

The next theorem is consequence of [16, Theorem 6.6, p. 248] and Theorem 5.8.

Theorem 5.9. *Let X be a continuum. Then for any $K \in 2^X$ the following statements are equivalent:*

- (1) X is indecomposable,
- (2) $2^X/2_K^X - \{2_K\}$ is not arcwise connected,
- (3) For each $n \in \mathbb{N}$, $C_K^n(X) - \{C_{n_K}\}$ is not arcwise connected,
- (4) $C(X) - \{C_K\}$ is not arcwise connected.

Let Z be a topological space, denote by $\mathcal{C}(Z)$ the set

$$\{A \subset Z : A \text{ is a component of } Z\}.$$

Lemma 5.10. *Let X be a continuum and $n \in \mathbb{N}$. Let U be an open set in X and let C be a component of U . Then $\langle C \rangle_n$ is a component of the open set $\langle U \rangle_n$.*

Proof. Let \mathcal{C} be a component of $\langle U \rangle_n$ containing $\langle C \rangle_n$ and $A \in \mathcal{C}$. Since $\langle C \rangle_n \cap C(X) \neq \emptyset$, by [10, Lemma 1, p. 1578], then $\bigcup \mathcal{C}$ is a connected subset of U which contains C . But since C is a component of U , $A \subset \bigcup \mathcal{C} \subset C$. Then $A \in \langle C \rangle_n$. Therefore $\langle C \rangle_n = \mathcal{C}$. \square

Corollary 5.11. *Let X be a continuum, $p \in X$ and $n \in \mathbb{N}$. If $A \subset X$, then $A \in \mathcal{C}(X - \{p\})$ if and only if $\langle A \rangle_n \in \mathcal{C}(C_n(X) - C_{n\{p\}}(X))$.*

Proof. Let $A \in \mathcal{C}(X - \{p\})$. By Lemma 5.10 $\langle A \rangle_n$ is a component of $\langle X - \{p\} \rangle_n$. Since $\langle X - \{p\} \rangle_n = C_n(X) - C_{\{p\}}(X)$, $\langle A \rangle_n \in \mathcal{C}(C_n(X) - C_{n\{p\}}(X))$.

Now, let $A \subset X$ such that $\langle A \rangle_n \in \mathcal{C}(C_n(X) - C_{n\{p\}}(X))$. Then $p \notin A$. Let D be a component of $X - \{p\}$ such $A \subset D$. Then $\langle A \rangle_n \subset \langle D \rangle_n$, but $\langle A \rangle_n \in \mathcal{C}(C_n(X) - C_{n\{p\}}(X))$. Thus $\langle A \rangle_n = \langle D \rangle_n$ and $A = D$. \square

Corollary 5.12. *Let X be a continuum and let $p \in X$. Then $|\mathcal{C}(X - \{p\})| = |\mathcal{C}(C(X) - C_{\{p\}}(X))|$.*

Theorem 5.13. *Let X be a continuum, $\mu : C(X) \rightarrow [0, \infty)$ a Whitney map and let $K \in C(X) - F_1(X)$. If $t_0 < \mu(K)$ is such that $\mu^{-1}(t_0)$ is arcwise connected then $C(X) - C_K(X)$ is arcwise connected.*

Proof. Let $A \in C(X) - C_K(X)$ and $B \in \mu^{-1}(t_0)$. If $\mu(A) = t_0$, since $\mu^{-1}(t_0)$ is arcwise connected, there exists an arc between A and B which is contained in $\mu^{-1}(t_0)$.

Suppose that $\mu(A) < t_0$. There exists $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ an order arc such that $\alpha(0) = A$ and $\alpha(1) = X$. Thus, $t_0 \in \mu(\alpha([0, 1])) = [\mu(A), \mu(X)]$. By the intermediate value theorem, there exists $t \in (0, 1)$ such that $\alpha(t) \in \mu^{-1}(t_0)$. Since $\mu^{-1}(t_0)$ is arcwise connected, there exists an arc between $\alpha(t)$ and B . Then, there is $\gamma : [0, 1] \rightarrow C(X)$ an arc from A to B . Notice that $\mu(\gamma(s)) \leq t_0$ and $\mu(D) > t_0$ for every $D \in C_K(X)$. Thus, $\gamma([0, 1]) \subset C(X) - C_K(X)$.

Now, suppose $\mu(A) > t_0$. Let $a \in A$, there exists $\beta : [0, 1] \rightarrow C(X)$ an order arc such that $\beta(0) = \{a\}$ and $\beta(1) = A$. Thus, $t_0 \in \mu(\beta([0, 1])) = [\mu(\{a\}), \mu(A)]$. By the intermediate value theorem, there exists $s \in (0, 1)$ such that $\beta(s) \in \mu^{-1}(t_0)$. Notice that $\beta([s, 1]) \cap C_K(X) = \emptyset$, otherwise, $K \subset \beta(s_0)$ and $K \subset A$ which is a contradiction. Since $\mu^{-1}(t_0)$ is arcwise connected, there exists an arc between $\beta(s)$ and B . Then, there is an arc from A to B into $C(X) - C_K(X)$. Therefore $C(X) - C_K(X)$ is arcwise connected. \square

A continuum X is *continuum chainable* if for each positive number ϵ and each pair of points $p \neq q$ in X , there is a finite sequence of subcontinua $\{A_1, \dots, A_n\}$ of X such that diameter $(A_i) < \epsilon$, $p \in A_1$, $q \in A_n$ and $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ for every $i < n$.

As consequence of Theorem 5.13 and [12, Theorem 33.4, p. 248] we have the next corollary.

Corollary 5.14. *For a continuum X . If X is continuum chainable and $K \in C(X) - F_1(X)$, then $C(X) - C_K(X)$ is arcwise connected.*

6. OTHER TOPOLOGICAL PROPERTIES

In this section we consider other topological properties of $C_K^n(X)$, some of them are consequences of the properties of $C_n(X)$.

6.1. Cells in the hyperspace $C_K^n(X)$.

Theorem 6.1. *Let X be a nondegenerate continuum and let $n \in \mathbb{N}$. Then $C_K^n(X)$ contains a n -cell for every $K \in 2^X$.*

Proof. Let $K \in 2^X$ and $x \in K$. Let A_1, \dots, A_n be n pairwise disjoint nondegenerate subcontinua of $X - \{x\}$. For each $j \in \{1, \dots, n\}$, let $a_j \in A_j$, and let $\alpha_j : [0, 1] \rightarrow C(A_j)$ be an order arc such that $\alpha_j(0) = \{a_j\}$ and $\alpha_j(1) = A_j$. Notice that $K \not\subset \alpha_j(t)$ for every $j \in \{1, \dots, n\}$ and each $t \in [0, 1]$. Then the map $\beta : [0, 1]^n \rightarrow C_K^n(X)$ given by $\beta((t_1, \dots, t_n)) = \pi_K(\alpha_1(t_1) \cup \dots \cup \alpha_n(t_n))$ is an embedding of $[0, 1]^n$ in $C_K^n(X)$. \square

Theorem 6.2. *Let X be a continuum, $n \in \mathbb{N}$ and let $K \in 2^X$. If $X - \{x\}$ contains n pairwise disjoint decomposable subcontinua for some $x \in K$, then $C_K^n(X)$ contains a $2n$ -cell.*

Proof. Let M_1, \dots, M_n be n pairwise disjoint decomposable subcontinua of $X - \{x\}$. Suppose that $M_j = A_j \cup B_j$, where A_j and B_j are subcontinua, for each $j \in \{1, \dots, n\}$. By the proof of (1.145) of [20], we may assume that each $A_j \cap B_j$ is connected, $A_j - (A_j \cap B_j) \neq \emptyset$, $B_j - (A_j \cap B_j) \neq \emptyset$, and $[A_j - (A_j \cap B_j)] \cap [B_j - (A_j \cap B_j)] = \emptyset$ for every $j \in \{1, \dots, n\}$. For each $j \in \{1, \dots, n\}$, let $\alpha_j : [0, 1] \rightarrow C(A_j)$ and $\beta_j : [0, 1] \rightarrow C(B_j)$ be order arcs such that $\alpha_j(0) = A_j \cap B_j$, $\alpha_j(1) = A_j$, $\beta_j(0) = A_j \cap B_j$ and $\beta_j(1) = B_j$. Then the map $\gamma : [0, 1]^{2n} \rightarrow C_K^n(X)$ given by $\gamma(t_1, \dots, t_{2n}) = \pi_K(\bigcup_{j=1}^n (\alpha_j(t_{2j-1}) \cup \beta_j(t_{2n}))$) is an embedding of $[0, 1]^{2n}$ in $C_K^n(X)$. \square

6.2. Contractibility. A topological space Z , is *contractible* provided that the identity map of Z is homotopic to a constant map of Z into Z .

Theorem 6.3. *Let X be a continuum and $n \in \mathbb{N}$. Then $C_{n_K}(X)$ is contractible for each $K \in 2^X$.*

Proof. Let $K \in 2^X$. There exists an order arc $\alpha : [0, 1] \rightarrow 2^X$ such that $\alpha(0) = K$ and $\alpha(1) = X$. Let $H : C_{n_K}(X) \times [0, 1] \rightarrow C_{n_K}(X)$ the function defined by $H(A, t) = \alpha(t) \cup A$. We shall prove that $H(C_{n_K}(X) \times [0, 1]) \subset C_{n_K}(X)$. Let $A \in C_{n_K}(X)$ and $t \in [0, 1]$. Since $K \subset A$ by [12, Theorem 15.3, p. 120], each component of K intersects $\alpha(t)$ for every $t \in [0, 1]$. Then each component of A intersects $\alpha(t)$. Thus $\alpha(t) \cup A$ has at most n components. Therefore H is a map. So $C_{n_K}(X)$ is contractible. \square

Theorem 6.4. *Let X be a continuum and let $n \in \mathbb{N}$. Consider the following statements:*

- (1) $C_n(X)$ is contractible.
- (2) $C_K^n(X)$ is contractible for each $K \in 2^X$.
- (3) $C_K^n(X)$ is contractible for some $K \in 2^X$.

Then, (1), (2) are equivalents, and (2) implies (3).

Proof. (2) implies (3) is immediate. Let $K \in 2^X$. Suppose that $C_n(X)$ is contractible, there exists a map $H' : C_n(X) \times [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ such that $H'(A, 0) = A$ and $H'(A, 1) = X$ for each $A \in C_n(X)$. Let $H : C_n(X) \times [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ be the segment homotopy associated with H' define by

$$H(A, t) = \bigcup \{H'(A, s) : 0 \leq s \leq t\}.$$

Then H is a map, see [20, Lemma 16.3, p. 533]. Observe that $H(\{A\} \times [0, 1])$ is an order arc from A to X for every $A \in C_n(X)$.

Claim. $H(C_{n_K}(X) \times [0, 1]) = C_{n_K}(X)$.

Since $C_{n_K}(X) = H(C_{n_K}(X) \times \{0\})$, then $C_{n_K}(X) \subset H(C_{n_K}(X) \times [0, 1])$. Now, let $A \in C_{n_K}(X)$. Since $H(A, 0) = A$ and $H(A, 0) \subset H(A, t)$ for every $t \in [0, 1]$, then $K \subset A \subset H(A, t)$. Thus $H(A, t) \in C_{n_K}(X)$.

On the other hand, we define $G : C_K^n(X) \times [0, 1] \rightarrow C_K^n(X)$ by $G(\mathcal{A}, t) = \pi_K(H(\pi_K^{-1}(\mathcal{A}), t))$ which is a map such that for each $\mathcal{A} \in C_K^n(X)$, $G(\mathcal{A}, 0) = \mathcal{A}$ and $G(\mathcal{A}, 1) = C_{n_K}$. Hence $C_K^n(X)$ is contractible. Thus (1) implies (2).

Now, let $K = X$. By Remark 1.1 $C_K^n(X)$ is homeomorphic to $C_n(X)$. Since $C_K^n(X)$ is contractible, $C_n(X)$ is contractible. Thus (2) implies (1). \square

Given a continuum X , denote by $C_\infty(X)$ the set $\bigcup_{n=1}^\infty C_n(X)$. By Theorem 6.4, [16, Theorem 3.7, p. 241] and [16, Theorem 8.7, p. 254] we have the following:

Theorem 6.5. *Let X be a continuum and let $n \in \mathbb{N}$ be given. Then the following are equivalent.*

- (1) 2^X is contractible.
- (2) $C_n(X)$ is contractible.
- (3) $C_\infty(X)$ is contractible
- (4) $C(X)$ is contractible.
- (5) $C_K^n(X)$ is contractible for each $K \in 2^X$.

A continuum X is said to have *Kelley's property* provided that given any $\epsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that if $a, b \in X$, $d(a, b) < \delta$, and $A \in C(X)$ such that $a \in A$, then there exists $B \in C(X)$ such that $b \in B$ and $H_d(A, B) < \epsilon$. We say that a continuum X is *smooth at a point* $p \in X$ provided that for each $\epsilon > 0$ there is $\delta > 0$ such that for each $x \in X$, for each subcontinuum M containing p such that $x \in M$ and for each $y \in X$ satisfying $d(x, y) < \delta$ there is a subcontinuum L containing p such that $y \in L$ and $H_d(M, L) < \epsilon$. A continuum X is *smooth* if it is smooth at some point.

Corollary 6.6. *If $C_n(X)$ is a smooth continuum and $K \in 2^X$, then for each $n \in \mathbb{N}$, $C_K^n(X)$ is contractible.*

Proof. Since $C_n(X)$ is smooth continuum, by [7, Corollary 4.3.1, p. 253], X has a Kelley's property, then $C_n(X)$ is contractible by [16, Corollary 3.8, p. 241]. Thus, $C_K^n(X)$ is contractible by Theorem 6.4. \square

A nonempty closed proper subset (continuum) L of a continuum X is called;

- an R^1 -set (continuum) if there exist an open set U containing L and two sequences $\{C_m^i\}_{m=1}^\infty$, $i = 1, 2$, of components of U such that $L = \limsup C_m^1 \cap \limsup C_m^2$,
- an R^2 -set (continuum) if there exist an open set U containing L and two sequences $\{C_m^i\}_{m=1}^\infty$, $i = 1, 2$, of components of U such that $L = \lim C_m^1 \cap \lim C_m^2$,
- an R^3 -set (continuum) if there exist an open set U containing L and a sequence $\{C_m\}_{m=1}^\infty$ of components of U such that $L = \liminf C_m$.

Theorem 6.7. *Let $n \in \mathbb{N}$. If a continuum X contains an R^i -continuum, $i \in \{1, 2, 3\}$, then $C_n(X)$ contains an R^i -set for $i \in \{1, 2, 3\}$, respectively.*

Proof. Let $L = \limsup C_m^1 \cap \limsup C_m^2 \subset U$ be an R^1 -continuum of X . By Lemma 5.10 $\langle C_m^i \rangle_n$ are components of $\langle U \rangle_n$. Let $\mathcal{L} = \limsup \langle C_m^1 \rangle_n \cap \limsup \langle C_m^2 \rangle_n$. Then $\{\{x\} : x \in L\} \subset \mathcal{L}$ and \mathcal{L} is closed. Let $A \in \mathcal{L}$, for each $i = 1, 2$, let $\{A_{m_j}^i\}_{j=1}^\infty$ be sequences such that $\lim_{j \rightarrow \infty} A_{m_j}^i = A$, where $A_{m_j}^i \in \langle C_{m_j}^i \rangle_n$. Then $A \subset L$ so that $A \in \langle U \rangle_n$. Thus $\mathcal{L} \subset \langle U \rangle_n$ is an R^1 -set of $C_n(X)$. The proof for $i = 2, 3$ is similar. \square

By [2, Corollary 3.3, p. 317] and Theorem 6.7 we conclude the next result.

Corollary 6.8. *Let $n \in \mathbb{N}$. If a continuum X contains an R^i -continuum for $i \in \{1, 2, 3\}$, then $C_n(X)$ is not contractible.*

As consequence of Theorem 6.4 and Corollary 6.8 we obtain

Corollary 6.9. *Let $n \in \mathbb{N}$. If a continuum X contains an R^i -continuum for $i \in \{1, 2, 3\}$ and $K \in 2^X$, then $C_K^n(X)$ is not contractible.*

The following results give another proof to Corollary 6.9.

Lemma 6.10. *Let X be a continuum, $n \in \mathbb{N}$ and let $K \in 2^X$. For every $\epsilon > 0$, $\pi_K(N_H(C_{n_K}(X), \epsilon) \cap C_n(X))$ is an open subset in $C_K^n(X)$ containing C_{n_K} .*

Proof. Since $N_H(C_{n_K}(X), \epsilon) \cap C_n(X)$ is an open subset in $C_n(X)$ and π_K is a closed map. Then

$$\begin{aligned} \pi_K(C_n(X) - (N_H(C_{n_K}(X), \epsilon) \cap C_n(X))) &= \\ \pi_K(C_n(X)) - \pi_K(N_H(C_{n_K}(X), \epsilon) \cap C_n(X)) &= \\ C_K^n(X) - \pi_K(N_H(C_{n_K}(X), \epsilon) \cap C_n(X)) & \end{aligned}$$

is closed in $C_K^n(X)$. Thus $\pi_K(N_H(C_{n_K}(X), \epsilon) \cap C_n(X))$ is an open subset containing C_{n_K} . \square

Lemma 6.11. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $K \in 2^X$. If \mathcal{U} is an open subset in $C_n(X)$ such that $C_{n_K}(X) \subset \mathcal{U}$, then $\pi_K(\mathcal{U})$ is an open subset in $C_K^n(X)$ such that $C_{n_K} \in \pi_K(\mathcal{U})$.*

Proof. Give $\mathcal{A} \in \pi_K(\mathcal{U})$, there exists $A \in \mathcal{U}$ such that $\pi_K(A) = \mathcal{A}$. If $A \notin C_{n_K}(X)$, there is \mathcal{W} an open subset of $C_n(X)$ such that $A \in \mathcal{W} \subset \mathcal{U} - C_{n_K}(X)$. By Remark 1.2, $\pi_K(\mathcal{W})$ is an open subset in $C_K^n(X)$ containing \mathcal{A} such that $\pi_K(\mathcal{W}) \subset \pi_K(\mathcal{U})$.

If $A \in C_{n_K}(X)$. Since $C_{n_K}(X) \subset \mathcal{U}$, there is $\epsilon > 0$ such that $N_H(C_{n_K}(X), \epsilon) \cap C_n(X) \subset \mathcal{U}$, then $A \in N_H(C_{n_K}(X), \epsilon) \cap C_n(X)$. By Lemma 6.10,

$$\pi_K(N_H(C_{n_K}(X), \epsilon) \cap C_n(X)) \subset \pi_K(\mathcal{U})$$

is an open subset in $C_K^n(X)$. Therefore $\pi_K(\mathcal{U})$ is an open subset in $C_K^n(X)$ such that $C_{n_K} \in \pi_K(\mathcal{U})$. \square

Theorem 6.12. *Let $n \in \mathbb{N}$. If a continuum X contains an R^i -continuum, $i \in \{1, 2, 3\}$, then for every $K \in 2^X$ $C_K^n(X)$ contains an R^i -set for $i \in \{1, 2, 3\}$, respectively.*

Proof. Let L be an R^1 -continuum of X . Then there exist an open subset U of X with $L \subset U$ and two sequences $\{C_m^i\}_{m=1}^\infty$ $i = 1, 2$ of components of U such that $L = \limsup C_m^1 \cap \limsup C_m^2$. We consider two cases:

Case I. Assume that $K \not\subset L$. Let $k_1 \in K - L$ and $W = U \cap (X - \{k_1\})$. Notice that $L \subset W$. Thus, there are subsequences $\{C_{m_j}^1\}_{j=1}^\infty$ and $\{C_{m_j}^2\}_{j=1}^\infty$ of $\{C_m^1\}_{m=1}^\infty$ and $\{C_m^2\}_{m=1}^\infty$ in W , respectively, such that $L = \limsup C_{m_j}^1 \cap \limsup C_{m_j}^2$. Since $\langle W \rangle_n \cap C_{n_K}(X) = \emptyset$, by proof of Theorem 6.7, $\mathcal{L} = \limsup \langle C_{m_j}^1 \rangle_n \cap \limsup \langle C_{m_j}^2 \rangle_n$ is an R^1 -set of $\langle W \rangle_n$. From Remark 1.2,

$$\pi_K(\mathcal{L}) = \limsup \pi_K(\langle C_{m_j}^1 \rangle_n) \cap \limsup \pi_K(\langle C_{m_j}^2 \rangle_n)$$

is an R^1 -set in $\pi_K(\langle W \rangle_n)$.

Case II. Suppose that $K \subset L$. Let $\epsilon > 0$ such that $N_d(L, \epsilon) \subset U$. Notice that $B_\epsilon^H(L) \subset N_H(C_{n_K}(X), \epsilon)$ and $B_\epsilon^H(L) \cap C_n(X) \subset \langle U \rangle_n$. Let $\mathcal{W} = \langle U \rangle_n \cup (N_H(C_{n_K}(X), \epsilon) \cap C_n(X))$ which is an open subset in $C_n(X)$ such that $C_{n_K}(X) \subset \mathcal{W}$. By Lemma 6.11 $\pi_K(\mathcal{W})$ is an open subset in $C_K^n(X)$ containing C_{n_K} . Let \mathcal{C}_m^i the component of $\pi_K(\mathcal{W})$ containing $\pi_K(\langle C_m^i \rangle_n)$ for each $i = 1, 2$. Then for each $i = 1, 2$, $\{\mathcal{C}_m^i\}_{m=1}^\infty$ is a sequence in $\pi_K(\mathcal{W})$. Thus $\mathcal{M} = \limsup \mathcal{C}_m^1 \cap \limsup \mathcal{C}_m^2$ is an R^1 -set in $\pi_K(\mathcal{W})$. The proof for $i = 2, 3$ is similar. \square

6.3. Homogeneity.

Theorem 6.13. *If X is a homogeneous continuum then $C_{\{p\}}^n(X)$ is homeomorphic to $C_{\{q\}}^n(X)$ for every $p, q \in X$.*

Proof. We consider $p, q \in X$ and $h : X \rightarrow X$ a homeomorphism such that $h(p) = q$. The induced function $C_n(h) : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ is a homeomorphism such that $C_n(h)(\{p\}) = \{q\}$. Moreover, if $A \in C_{n\{p\}}(X)$, then $C_n(h)(A) \in C_{n\{q\}}(X)$. Thus $C_n(h)(C_{n\{p\}}(X)) = C_{n\{q\}}(X)$. Let π_p and π_q be the quotient maps to $C_{\{p\}}^n(X)$ and $C_{\{q\}}^n(X)$, respectively. Since $g = \pi_q \circ C_n(h)$ is a quotient function. Then $C_{\{p\}}^n(h)$ is the homeomorphism induced by g . And the following diagram is commutative

$$\begin{array}{ccc} & C_n(h) & \\ C_n(X) & \rightarrow & C_n(X) \\ \pi_p \downarrow & & \downarrow \pi_q \\ C_{\{p\}}^n(X) & \rightarrow & C_{\{q\}}^n(X) \\ & C_{\{p\}}^n(h) & \end{array}$$

□

To finish this paper we ask the following questions.

Question 6.14. *If $X = S^1$ and $n \geq 2$, then $C_A^n(X)$ is homeomorphic to $C_B^n(X)$ for every $A, B \in C(X)$ (or 2^X)?*

Question 6.15. *If X is a homogeneous continuum then $C_A^1(X)$ is homeomorphic to $C_B^1(X)$ for every $A, B \in C(X)$ (or 2^X)?*

REFERENCES

- [1] J. G. Anaya, E. Castañeda-Alvarado, A. Fuentes-Montes de Oca and F. Orozco-Zitli *Making holes in the cone, suspension and hyperspaces of some continua*, Comment. Math. Univ. Carolin. **59** (2018), 343-364.
- [2] B. S. Baik, K. Hur and C. J. Rhee, *R^i -sets and contractibility*, J. Korean Math. Soc. **34** (1997), 309-319.
- [3] D. E. Bennett, *Aposyndetic properties of unicoherent continua*, Pacific J. Math. **37** (1971), 585-589.
- [4] J. Camargo, S. Macías, *Quotients of n -fold hyperspaces*, Topology Appl. **197** (2016), 154-166.
- [5] E. Castañeda-Alvarado, R. C. Mondragón, N. Ordoñez and F. Orozco-Zitli *The hyperspace $F_n^K(X)$* , preprint.
- [6] J. J. Charatonik, *Monotone mappings and unicoherence at subcontinua*, Topology Appl. **33** (1989), 209-215.
- [7] J. J. Charatonik, *Recent Research in Hyperspace Theory*, Extracta Math. **18** (2003), 235-262.
- [8] R. Duda, *On the hyperspaces of subcontinua of a finite graph, I*, Fund. Math. **62** (1968), 265-286.
- [9] R. Escobedo, Ma. de J. López and S. Macías, *On the hyperspace suspension of a continuum*, Topology Appl. **138** (2004), 109-124.
- [10] R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, *Rigidity of symmetric products*, Topology Appl. **160** (2013), 1577-1587.

- [11] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, 28. Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.
- [12] A. Illanes and S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1999.
- [13] J. C. Macías, *On the n -fold pseudo-hyperspace suspension of continua*, Glas. Mat. Ser. III 43(63) (2008), 439-449.
- [14] S. Macías, *Hyperspaces and cones*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3069-3073.
- [15] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X , II*, Topology Proc. **25** (2000), 255-276.
- [16] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X* , Topology Appl. **109** (2001), 237-256.
- [17] S. Macías, *On the n -fold hyperspace suspension of continua*, Topology Appl. **138** (2004), 125-138.
- [18] S. Macías, *On the n -fold hyperspace suspension of continua. II*, Glas. Mat. Ser. III 41(61) (2006), 335-343.
- [19] V. Martínez-de-la-Vega, *Dimension of n -fold hyperspaces of graphs*, Houston J. Math. **32** (2006), 783-799.
- [20] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1978.
- [21] S. B. Nadler, Jr., *A fixed point theorem for hyperspaces suspensions*, Houston J. Math. **5** (1979), 125-132.
- [22] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.
- [23] S. B. Nadler, Jr., *Dimension Theory, An Introduction with exercises*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, 18. Sociedad Matemática Mexicana, México, 2002.

FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO, INSTITUTO LITERARIO NO. 100, COL. CENTRO, TOLUCA, ESTADO DE MÉXICO C.P. 50000, MÉXICO

INDUCED MAPPINGS ON $C_n(X)/C_{n_K}(X)$

JOSÉ G. ANAYA, ENRIQUE CASTAÑEDA-ALVARADO,
AND JOSÉ A. MARTÍNEZ-CORTEZ

ABSTRACT. Given a continuum X and $n \in \mathbb{N}$. Let $C_n(X)$ and $C_{n_K}(X)$ the hyperspaces, of nonempty subsets of X with at most n components and, all elements in $C_n(X)$ containing K where K is a compact subset of X , respectively. Given a mapping $f : X \rightarrow Y$ between continua, let $C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ be the induced mapping by f , defined by $C_n(f)(A) = f(A)$. Now, $C_{n_K}^n(X)$ denotes the quotient space $C_n(X)/C_{n_K}(X)$. Similarly, let $C_{f(K)}^n(f)$ denote the natural induced mapping between $C_{n_K}^n(X)$ and $C_{f(K)}^n(Y)$. In this paper, we prove some relationships among the mappings f , $C_n(f)$ and $C_{n_K}^n(f)$ for the following classes of mappings: almost monotone, atriodic, confluent, joining, light, monotone, open, OM, pseudo-confluent, quasi-monotone, semi-confluent, strongly freely decomposable, weakly confluent, weakly monotone.

1. INTRODUCTION

A *continuum* is a nonempty compact connected metric space. A *subcontinuum* of a continuum X is a subset which is a continuum. A *map* is a continuous function.

Given a continuum X and n a positive integer. Denote by 2^X the hyperspace of all nonempty closed subsets of X , $C_n(X)$ is the hyperspace of all nonempty subsets of X having at most n components and $F_n(X)$ is the hyperspace of all nonempty subsets of X having at most n points, all topologized with the Hausdorff metric (see [20, p. 1]). When $n = 1$, we write $C(X)$ instead of $C_1(X)$. Given a compact subset K of X , the set

$$C_{n_K}(X) = \{A \in C_n(X) : K \subset A\}$$

is called the *containment hyperspace*, also, considered with the Hausdorff metric. For a continuum X , $C_{n_K}^n(X)$ denote the quotient space

$$C_n(X)/C_{n_K}(X)$$

with the quotient topology. The fact that $C_n(X)/C_{n_K}(X)$ is a continuum follows from [21, Theorem 3.10, p. 40]. π_K^X denote the quotient map $\pi_K^X : C_n(X) \rightarrow C_n(X)/C_{n_K}(X)$. Also, $\pi_K^X(C_{n_K}(X)) = \{C_{n_K}^X\}$.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 54C05, 54C10, 54B20, 54B15.

Key words and phrases. Induced mapping, Hyperspaces, Continuum, Containment hyperspaces, Quotient space.

Given a mapping $f : X \rightarrow Y$ between continua, the mapping $C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ defined by $C_n(f)(A) = f(A)$ is called the induced map by f . Let $C_K^n(f) : C_K^n(X) \rightarrow C_K^n(Y)$ be the function defined such that a way that

$$C_K^n(f)(\pi_K^X(A)) = \pi_{f(K)}^Y(f(A)).$$

By [12, Theorem 4.3] $C_K^n(f)$ is a map. Moreover, the following diagram is commutative.

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{C_n(f)} & C_n(Y) \\ \pi_K^X \downarrow & & \downarrow \pi_{f(K)}^Y \\ C_K^n(X) & \xrightarrow{C_K^n(f)} & C_{f(K)}^n(Y) \end{array}$$

Let \mathbb{A} be a class of mappings between continua. A general problem is to determine all possible relationships among the following statements:

- (1) $f \in \mathbb{A}$;
- (2) $C_n(f) \in \mathbb{A}$;
- (3) $C_K^n(f) \in \mathbb{A}$ for each $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f) \in \mathbb{A}$ for some $K \in 2^X$.

There are some particular results concerning this problem, which relate (1) and (2). Readers especially interested in this topic are referred to [5], [7], [8], [10], [11], [13]- [17]. Regarding induced maps in quotient hyperspaces, see [1], [3], [4], [6], [9], among others.

In this paper we study the interrelations among the statements (1)-(4), for the following classes of mappings: almost monotone, atriodic, confluent, joining, light, monotone, open, OM, pseudo-confluent, quasi-monotone, semi-confluent, strongly freely decomposable, weakly confluent, weakly monotone.

2. DEFINITIONS AND NOTATIONS

An *arc* is any topological space homeomorphic to $I = [0, 1]$ and a *simple closed curve* is any topological space homeomorphic to $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. We denote the closure and interior of a subset A of X by $\text{Cl}_X(A)$ and $\text{Int}_X(A)$, respectively, and the positive integers by \mathbb{N} . Let X be a metric space with metric d and $\epsilon > 0$. $B_\epsilon^d(x)$ denote the open ball in X of radius ϵ and center x . The hyperspace 2^X is considered with the Hausdorff metric induced by d , which is denoted by H_d and defined as follows: for any $A, B \in 2^X$,

$$H_d(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N_d(B, \epsilon) \text{ and } B \subset N_d(A, \epsilon)\}, \text{ where}$$

$$N_d(A, \epsilon) = \bigcup_{x \in A} B_\epsilon^d(x).$$

Given a map $f : X \rightarrow Y$ between continua. Then the *induced function* from 2^X into 2^Y is the function f^* defined by

$$f^*(A) = f(A) \text{ for each } A \in 2^X.$$

Let $\mathcal{H}(X)$ be a hyperspace of X such that

$$\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C(X), C_n(X), F_n(X)\}.$$

The *induced function* from $\mathcal{H}(X)$ into $\mathcal{H}(Y)$ is the function

$$\mathcal{H}(f) = f^*|_{\mathcal{H}(X)} : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(Y)$$

which is a map [18, Theorem 13.3, p. 106].

Let $A, B \in 2^X$. An *order arc* from A to B is a mapping $\alpha : I \rightarrow 2^X$ such that $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$, and $\alpha(r)$ is a proper subset of $\alpha(s)$ whenever $r < s$ (see [20, 1.2-1.8, p. 57-59]).

Given a continuum X . For any finitely many subsets U_1, \dots, U_r of X , we define $\langle U_1, \dots, U_r \rangle$ as

$$\{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^r U_i, A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ for each } i = 1, \dots, r\}.$$

The set

$$\{\langle U_1, \dots, U_r \rangle : \text{for each } i \in \{1, \dots, r\}, U_i \text{ is an open set of } X, r \in \mathbb{N}\}$$

is a base for a topology for 2^X . This topology is called the *Vietoris topology* and matches with the topology induced by H_d , see [18, Theorem 3.2, p. 18]. In this paper, $\langle U_1, \dots, U_r \rangle_n$ denote the set $\langle U_1, \dots, U_r \rangle \cap C_n(X)$.

A surjective mapping $f : X \rightarrow Y$ between continua said to be:

- *almost monotone* provided that for each subcontinuum with nonempty interior Q of Y , $f^{-1}(Q)$ is connected;
- *atriodic* if for every subcontinuum Q of Y , there exist two components C and D of $f^{-1}(Q)$ such that $f(C) \cup f(D) = Q$ and for each component E of $f^{-1}(Q)$, we have that either $f(E) = Q$, or $f(E) \subset f(C)$ or $f(E) \subset f(D)$;
- *confluent* if, for every subcontinuum K of Y and for each component M of $f^{-1}(K)$, $f(M) = K$;
- *freely decomposable* if whenever A and B are proper subcontinua of Y such that $Y = A \cup B$, then there exist two proper subcontinua A' and B' of X , such that $X = A' \cup B'$, $f(A') \subset A$ and $f(B') \subset B$;
- *joining* provided that for each subcontinuum Q of Y and for each two components C and D of $f^{-1}(Q)$, we have that $f(C) \cap f(D) \neq \emptyset$;
- *light* if $f^{-1}(y)$ is totally disconnected for each $y \in Y$;
- *monotone* if $f^{-1}(y)$ is connected for each $y \in Y$;
- *open* if $f(U)$ is open in Y for each open subset U of X ;

- *OM* if there exist a continuum Z and mappings $g : X \rightarrow Z$ and $h : Z \rightarrow Y$ such that $f = h \circ g$, g is monotone and h is open;
- *pseudo-confluent* provided that for each irreducible subcontinuum B of Y , there exists a component C of $f^{-1}(B)$ such that $f(C) = B$;
- *quasi-monotone* provided that for each subcontinuum B of Y having nonempty interior in Y , $f^{-1}(B)$ has only finitely many components and each of these components maps onto B under f ;
- *semi-confluent* if, for every subcontinuum B of Y and every pair of components C and D of $f^{-1}(B)$, either $f(C) \subset f(D)$ or $f(D) \subset f(C)$;
- *semi-open* if for every open subset U of X , $\text{Int}_Y(f(U)) \neq \emptyset$;
- *strongly freely decomposable* if whenever A and B are proper subcontinua of Y such that $Y = A \cup B$, we obtain that $f^{-1}(A)$ and $f^{-1}(B)$ are connected;
- *weakly confluent* if, for each subcontinuum K of Y , there exists a subcontinuum M of X such that $f(M) = K$;
- *weakly monotone* provided that for each subcontinuum B of Y having nonempty interior in Y , each component of $f^{-1}(B)$ is mapped by f onto B .

3. PRELIMINARY RESULTS

Let X be a continuum and let L be a subcontinuum of X . We denote by X/L the quotient space obtained by shrinking L to a point. Then X/L is a continuum by [21, Theorem 3.10, p. 40]. Let X and Y be continua, let L be a subcontinuum of X , and let $f : X \rightarrow Y$ be a surjective map. We consider the quotient spaces X/L and $Y/f(L)$. Let $q_X : X \rightarrow X/L$ and $q_Y : Y \rightarrow Y/f(L)$ be the quotient maps. We denote $q_X(L)$ and $q_Y(f(L))$ by L_X and L_Y , respectively. Notice that f induces a function $\tilde{f} : X/L \rightarrow Y/f(L)$ (see [12, Theorem 7.7, p. 17]) given by

$$\tilde{f}(\mathcal{A}) = \begin{cases} q_Y(f((q_X)^{-1}(\mathcal{A}))) & \text{if } \mathcal{A} \neq L_X; \\ L_Y & \text{if } \mathcal{A} = L_X. \end{cases}$$

The continuity of \tilde{f} follows from [12, Theorem 4.3, p. 126]. Observe that the following diagram is commutative.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ q_X \downarrow & & \downarrow q_Y \\ X/L & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y/f(L) \end{array}$$

The next proposition is consequence of [4, Theorem 3.1, p. 492].

Proposition 3.1. *Let X and Y be continua and let K be a compact subset of X . If $f : X \rightarrow Y$ surjective map, the following hold:*

- (1) The maps π_K^X and $\pi_{f(K)}^Y$ are monotone;
- (2) The maps $\pi_K^X|_{C_n(X)-C_{n_K}(X)} : C_n(X) - C_{n_K}(X) \rightarrow C_K^n(X) - \{C_{n_K}^X\}$ and $\pi_{f(K)}^Y|_{C_n(Y)-C_{n_{f(K)}}(Y)} : C_n(Y) - C_{n_{f(K)}}(Y) \rightarrow C_{f(K)}^n(Y) - \{C_{n_{f(K)}}^Y\}$ are homeomorphisms;
- (3) If $C_{n_K}(X)$ and $C_{n_{f(K)}}(Y)$ are nowhere dense in $C_n(X)$ and $C_n(Y)$, respectively, then π_K^X and $\pi_{f(K)}^Y$ are semi-open maps.

Proposition 3.2. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a surjective mapping between continua and let L be a subcontinuum of X . Suppose that \mathbb{A} is any of the following class of mappings between continua: monotone, OM, confluent, semi-confluent, weakly confluent, pseudo-confluent, quasi-monotone, weakly monotone, joining, almost monotone, atriodic, freely decomposable or strongly freely decomposable. If $f \in \mathbb{A}$, then $\tilde{f} \in \mathbb{A}$.*

Proof. In [4, Theorem 3.2, p. 493] is proved that if f is either almost monotone, atriodic, freely decomposable or strongly freely decomposable, then \tilde{f} is almost monotone, atriodic, freely decomposable or strongly freely decomposable, respectively. Let \mathbb{A} be one of the other classes of mappings of the statement. Since q_Y is monotone, $q_Y \in \mathbb{A}$. By [19, (5.1),(5.4), (5.5), (5.6)], and Propositions 4.1, 4.3 and 4.4 of [6], $q_Y \circ f \in \mathbb{A}$. Now, by [19, (5.15), (5.16), (5.19), (5.20) and (5.21)], \mathbb{A} has the composition factor property. Thus, since $q_Y \circ f = \tilde{f} \circ q_X$, $\tilde{f} \circ q_X \in \mathbb{A}$. Therefore, $\tilde{f} \in \mathbb{A}$. \square

Since $q_X|_{X-L}$ and $q_Y|_{Y-f(L)}$ are homeomorphisms and

$$f|_{f^{-1}(Y-f(L))} = q_Y^{-1}|_{Y-f(L)} \circ \tilde{f} \circ q_X.$$

we have the following proposition.

Proposition 3.3. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a mapping between continua and L be a subcontinuum of X .*

- (1) If \tilde{f} is confluent, then for each subcontinuum $B \subset Y - f(L)$ and each component A of $f^{-1}(B)$, $f(A) = B$.
- (2) If \tilde{f} is weakly confluent, then for each subcontinuum $B \subset Y - f(L)$, there exists A be a subcontinuum of X such that $f(A) = B$.
- (3) If \tilde{f} is quasi-monotone (weakly monotone), then for each subcontinuum $B \subset Y - f(L)$ with $\text{Int}_Y(B) \neq \emptyset$ and each component A of $f^{-1}(B)$, $f(A) = B$.

Proposition 3.4. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a surjective mapping between continua and $r \in \mathbb{N}$ such that $r \leq n$. Let L_1, \dots, L_r be nonempty disjoint closed subsets of Y . For each $i \in \{1, \dots, r\}$, let M_i be a component of $f^{-1}(L_i)$. Then,*

- (1) $\langle M_1, \dots, M_r \rangle_n$ is a component of $C_n(f)^{-1}(\langle L_1, \dots, L_r \rangle_n)$.
- (2) If M is a component of $f^{-1}(L_i)$ such that $M \neq M_i$ and $r < n$, then $\langle M_1, \dots, M_r, M \rangle_n$ is a component of $C_n(f)^{-1}(\langle L_1, \dots, L_r \rangle_n)$.

- (3) If $L_i \notin C_{f(K)}^n(Y)$ such that $f(K) \not\subset \bigcup_{i=1}^r L_i$, then $\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_r \rangle_n)$ is a component of $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\langle L_1, \dots, L_r \rangle_n))$.

Proof. (1) and (2) are proved in [1, Proposition 2.4, p. 478]. We will prove (3), consider \mathfrak{D} the component of $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\langle L_1, \dots, L_r \rangle_n))$ containing $\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_r \rangle_n)$. Notice that $\langle M_1, \dots, M_r \rangle_n \subset (\pi_K^X)^{-1}(\mathfrak{D})$. Since $f(K) \not\subset \bigcup_{i=1}^r L_i$, we have that $\langle L_1, \dots, L_r \rangle_n \cap C_{n_{f(K)}}(Y) = \emptyset$. Then $\pi_{f(K)}^Y(C_{n_{f(K)}}(Y)) \notin \pi_{f(K)}^Y(\langle L_1, \dots, L_r \rangle_n)$. Thus, $\pi_K^X(C_{n_K}(X)) \notin \mathfrak{D}$ and $C_{n_K}(X) \cap (\pi_K^X)^{-1}(\mathfrak{D}) = \emptyset$. Since $C_K^n(f) \circ \pi_K^X = \pi_{f(K)}^Y \circ C_n(f)$, then $(\pi_K^X)^{-1}(\mathfrak{D}) \subset C_n(f)^{-1}(\langle L_1, \dots, L_r \rangle_n)$. By (1) of this proposition and (1) of Proposition 3.1, $(\pi_K^X)^{-1}(\mathfrak{D}) \subset \langle M_1, \dots, M_r \rangle_n$. Then $\mathfrak{D} = \pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_r \rangle_n)$. \square

The next result is a consequence of $C_{n_K}(X) = \{X\}$, if $K = X$.

Proposition 3.5. *Let \mathcal{H} a nondegenerate connected subset of $C_n(X)$. If $X \in \mathcal{H}$, then there exists $K \in 2^X$ such that $C_{n_K}(X) \subset \mathcal{H}$.*

Lemma 3.6. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a surjective mapping between continua, $1 \leq n$, and let \mathcal{Q} a closed subset of $C_n(Y)$.*

- (1) *If $X \notin C_n(f)^{-1}(\mathcal{Q})$, there exists $m \in \mathbb{N}$ such that for each $K \in B_{\frac{1}{m}}^H(X)$, $C_{n_K}(X) \cap C_n(f)^{-1}(\mathcal{Q}) = \emptyset$.*
(2) *If $X \in C_n(f)^{-1}(\mathcal{Q})$, exists $K \in 2^X$ such that $C_{n_K}(X) \subset C_n(f)^{-1}(\mathcal{Q})$.*

Proof. Suppose that for each $m \in \mathbb{N}$, there exists $K_m \in B_{\frac{1}{m}}^H(X)$ such that $C_{n_{K_m}}(X) \cap C_n(f)^{-1}(\mathcal{Q}) \neq \emptyset$. Then, we may assume that $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ is a sequence of $C_n(X)$ such that $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge to X . We consider $L_m \in C_{n_{K_m}}(X) \cap C_n(f)^{-1}(\mathcal{Q})$ for each $m \in \mathbb{N}$. Notice that $\{L_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C_n(f)^{-1}(\mathcal{Q})$ is a sequence such that $K_m \subset L_m$. Thus, $\{L_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge to X . Then, $X \in C_n(f)^{-1}(\mathcal{Q})$, this is a contradiction.

For prove (2), let \mathcal{H} be a component of $C_n(f)^{-1}(\mathcal{Q})$ such that $X \in \mathcal{H}$. If \mathcal{H} is degenerate, is easy to verify (2). In another case, by Proposition 3.5, we conclude (2). \square

Lemma 3.7. *Let $K \in 2^X$, $f : X \rightarrow Y$ be a mapping between continua and $n \in \mathbb{N}$. If $f(K) \in F_1(Y)$, then*

$$C_K^n(f)^{-1}(C_{n_{f(K)}}^Y) = \pi_K^X \left(\bigcup_{p \in f^{-1}(f(K))} C_{n_{\{p\}}}(X) \right).$$

Proof. Let $\mathcal{A} \in \pi_K^X \left(\bigcup_{p \in f^{-1}(f(K))} C_{n_{\{p\}}}(X) \right)$, there exist $p \in f^{-1}(f(K))$ and $B \in C_{n_{\{p\}}}(X)$ such that $\pi_K^X(B) = \mathcal{A}$. Then $f(p) \in f(B)$ and $C_K^n(f)(\mathcal{A}) = C_K^n(f)(\pi_K^X(B)) = \pi_{f(K)}^Y(C_n(f)(B))$. Thus, $\pi_{f(K)}^Y(C_n(f)(B)) = C_{n_{f(K)}}^Y$, i.e., $\mathcal{A} \in C_K^n(f)^{-1}(C_{n_{f(K)}}^Y)$. \square

Proposition 3.8. *Let $K \in 2^X$, $n \in \mathbb{N}$ and $f : X \rightarrow Y$ be a mapping between continua. Then $C_K^n(f)^{-1}(C_{n_{f(K)}}^Y)$ is connected.*

Proof. Suppose that \mathcal{H} and \mathcal{L} are different components of $C_K^n(f)^{-1}(C_{n_{f(K)}}^Y)$. We may assume that $C_{n_K}^X \in \mathcal{H}$. By Proposition 3.1, $(\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{H})$ and $(\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{L})$ are disjoint connected subset of $C_n(X)$ such that $C_{n_K}(X) \subset (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{H})$. Now, let $L \in (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{L})$. Notice that $C_K^n(f)(\pi_K^X(L)) = C_{n_{f(K)}}^Y$, and for each order arc $\alpha : I \rightarrow C_n(X)$ of L to X , $C_K^n(f)(\pi_K^X(\alpha(I))) = \{C_{n_{f(K)}}^Y\}$. Then, $X \in (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{H}) \cap (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{L})$, this is a contradiction. Therefore, $C_K^n(f)^{-1}(C_{n_{f(K)}}^Y)$ is connected. \square

4. HOMEOMORPHISM AND OPEN MAPPINGS

Theorem 4.1. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a mapping between continua and $n \in \mathbb{N}$. Then the following conditions are equivalent:*

- (1) f is injective;
- (2) $C_n(f)$ is injective;
- (3) $C_K^n(f)$ is injective for each $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f)$ is injective for some $K \in 2^X$.

Proof. We notice that (1) and (2) are equivalent, (2) implies (3), and (3) implies (4). To prove that (4) implies (1). Let $x, y \in X$ such that $f(x) = f(y)$. Then $\pi_{f(K)}^Y(\{f(x)\}) = \pi_{f(K)}^Y(\{f(y)\})$. Since $C_K^n(f)(\pi_K^X(A)) = \pi_{f(K)}^Y(f(A))$ for each $A \in C_n(X)$ and $C_K^n(f)$ is injective, $\pi_K^X(\{x\}) = \pi_K^X(\{y\})$. Then $\{x\} = \{y\}$ or $K \subset \{x\} \cap \{y\}$. In any case, $x = y$. Therefore f is injective. \square

Theorem 4.2. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a mapping between continua and $n \in \mathbb{N}$. We consider the following conditions:*

- (1) f is surjective;
- (2) $C_n(f)$ is surjective;
- (3) $C_K^n(f)$ is surjective for each $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f)$ is surjective for some $K \in 2^X$.

Then (2) and (3) are equivalent, (3) implies (4) and each one of the conditions (2), (3) and (4) implies (1).

Proof. We notice that (2) implies (3) and (3) implies (4). We will prove (3) implies (2). Let $B \in C_n(Y)$ and $K \in 2^X$ such that $K \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Since $C_K^n(f)$ is surjective, there exists $\mathcal{A} \in C_K^n(X)$ such that $C_K^n(f)(\mathcal{A}) = \pi_{f(K)}^Y(B)$. Also, exists $A \in C_n(X)$ such that $\pi_K^X(A) = \mathcal{A}$. Then,

$$C_K^n(f)(\mathcal{A}) = C_K^n(f)(\pi_K^X(A)) = \pi_{f(K)}^Y(C_n(f)(A)) = \pi_{f(K)}^Y(B).$$

As $\pi_{f(K)}^Y(B) \neq C_{n_{f(K)}}^Y$, $C_n(f)(A) = B$. Hence, $C_n(f)$ is surjective.

Now, to prove (4) implies (1). Let $K \in 2^X$ such that $C_K^n(f)$ is surjective

and $y \in Y$. If $y \in f(K)$, there exists $k_1 \in K$ such that $f(k_1) = y$. Now, suppose that $y \notin f(K)$, $\{y\} \notin C_{n_{f(K)}}(Y)$. Then $\pi_{f(K)}^Y(\{y\}) \neq C_{n_{f(K)}}^Y$. Since $C_K^n(f)$ is surjective, there exists $\mathcal{A} \in C_K^n(X)$ such that $C_K^n(f)(\mathcal{A}) = \pi_{f(K)}^Y(\{y\})$. Moreover, there is $A \in C_n(X)$ such that $\pi_K^X(A) = \mathcal{A}$. As $C_K^n(f) \circ \pi_K^X = \pi_{f(K)}^Y \circ C_n(f)$, $C_K^n(f)(\pi_K^X(A)) = \pi_{f(K)}^Y(C_n(f)(A)) = \pi_{f(K)}^Y(\{y\})$. Thus, there exists $a \in A$ such that $f(a) = y$. \square

As consequence of Theorem 4.2 y [10, Proposition 1, p. 784] we have following result.

Corollary 4.3. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a mapping between continua and $n \in \mathbb{N}$. Then $C_K^n(f) : C_K^n(X) \rightarrow C_{f(K)}^n(Y)$ is onto for every $K \in 2^X$ if and only if f is weakly confluent.*

The next example shows us that there are continua X, Y and a map $f : X \rightarrow Y$ such that f is not weakly confluent and $C_K^n(f)$ is surjective for some $K \in 2^X$.

Example 4.4. *Let $f : [0, 1] \rightarrow S^1$ defined by $f(t) = e^{2\pi it}$. Then, f is not pseudo-confluent, or weakly monotone and not freely decomposable. If $K = \{0\}$, then $C_K^n(f)$ is monotone for every $n \geq 1$.*

Proof. Notice that, f is not pseudo-confluent, or weakly monotone and not freely decomposable.

Now, let $K = \{0\}$ and $n \in \mathbb{N}$. We shall prove that $C_K^n(f)$ is monotone. Let $\mathcal{B} \in C_{f(K)}^n(Y)$. Suppose that $\mathcal{B} = C_{n_{f(K)}}$, by Proposition 3.8, $C_K^n(f)^{-1}(\mathcal{B})$ is connected. In another case, by Lemma 3.7,

$$C_K^n(f)^{-1}(\mathcal{B}) = \pi_K^X \left(\bigcup_{p \in f^{-1}(f(K))} C_{n_{\{p\}}}([0, 1]) \right).$$

Then, $C_n([0, 1]) - \bigcup_{p \in f^{-1}(f(K))} C_{n_{\{p\}}}([0, 1]) = C_n((0, 1))$. Since $f|_{(0,1)}$ is one to one, by Theorem 4.1 $C_K^n(f)|_{\pi_K^X(C_n((0,1)))}$ is one to one. Then $C_K^n(f)^{-1}(\mathcal{B})$ is connected. \square

Theorem 4.5. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a mapping between continua and $n \in \mathbb{N}$. Then the following conditions are equivalent:*

- (1) f is a homeomorphism;
- (2) $C_n(f)$ is a homeomorphism;
- (3) $C_K^n(f)$ is a homeomorphism for each $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f)$ is a homeomorphism for some $K \in 2^X$.

Proof. (1) implies (2). It follows from [10, Theorem 46, p. 801]. We notice that (2) implies (3) and (3) implies (4). By Theorem 4.1 and Theorem 4.2 f is bijective. Thus, f is a homeomorphism. Therefore (4) implies (1). \square

Theorem 4.6. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a mapping between continua and $n \in \mathbb{N}$. Consider the following conditions:*

- (1) f is a homeomorphism;
- (2) $C_n(f)$ is open;
- (3) $C_K^n(f)$ is open for each $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f)$ is open for some $K \in 2^X$.

Then conditions (1-3) are equivalent and each one of the conditions (1-3) implies (4).

Proof. By [5, Corollary 3.3, p. 122], (1) and (2) are equivalent. We have that (2) implies (3), by Theorem 4.5. Now, we prove that (3) implies (2). Let \mathcal{U} an open subset of $C_n(X)$.

First, we may assume that $X \in \mathcal{U}$. Since $C_n(X)$ is locally connected in X . There exists \mathcal{V} an open connected subset of $C_n(X)$ containing X such that $\mathcal{V} \subset \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$. By Proposition 3.5, there exists $K \in 2^X$ such that $C_{n_K}(X) \subset \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$. By [2, Lemma 6.10], $\pi_K^X(\mathcal{U})$ is an open subset of $C_K^n(X)$ containing $C_{n_K}^X$. Since $C_K^n(f)$ is an open mapping, $C_K^n(f)(\pi_K^X(\mathcal{U}))$ is an open subset of $C_{f(K)}^n(Y)$ containing $C_{n_{f(K)}}^Y$. Notice that $C_K^n(f)(\pi_K^X(\mathcal{U})) = \pi_{f(K)}^Y(C_n(f)(\mathcal{U}))$. Thus, $(\pi_{f(K)}^Y)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(C_n(f)(\mathcal{U}))) = C_n(f)(\mathcal{U})$ is an open subset of $C_n(Y)$.

In another case, if $X \notin \mathcal{U}$, by Lemma 3.6, there exists $K \in 2^X$ such that $C_{n_K}(X) \cap \mathcal{U} = \emptyset$. Then, $\pi_K^X(\mathcal{U})$ and $C_K^n(f)(\pi_K^X(\mathcal{U}))$ are open subsets of $C_K^n(X)$ and $C_{f(K)}^n(Y)$, respectively. Also, $C_{n_K}^X \notin \pi_K^X(\mathcal{U})$ and $C_{n_{f(K)}}^Y \notin C_K^n(f)(\pi_K^X(\mathcal{U}))$. Since $C_K^n(f)(\pi_K^X(\mathcal{U})) = \pi_{f(K)}^Y(C_n(f)(\mathcal{U}))$. Then,

$$(\pi_{f(K)}^Y)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(C_n(f)(\mathcal{U}))) = C_n(f)(\mathcal{U})$$

is an open subset of $C_n(Y)$, this is a contradiction. Therefore, $C_n(f)$ is an open mapping.

Clearly, (1-3) implies (4). □

The next example shows us that there are continua X, Y and a map $f : X \rightarrow Y$ such that f is not a homeomorphism and $C_K^n(f)$ is open for some $K \in 2^X$.

Example 4.7. *Let $J = [-1, 1]$ and $f : J \rightarrow I$ defined by $f(t) = |t|$. Then, f is not a homeomorphism. If $K = \{0\}$, then $C_K^n(f)$ is open for every $n \geq 1$.*

5. MONOTONE TYPE MAPPINGS

Theorem 5.1. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a mapping between continua and $n \in \mathbb{N}$. Let \mathbb{M} any of the following class of mappings: monotone, almost monotone, quasi-monotone, weakly monotone. If $C_K^n(f) \in \mathbb{M}$ for each $K \in 2^X$, then $f \in \mathbb{M}$.*

Proof. Let $B \in C_n(Y) - \{Y\}$ (with $\text{Int}_Y(B) \neq \emptyset$ for the cases: almost monotone, quasi-monotone and weakly monotone). We consider $K \in 2^X$ such that $K \cap$

$f^{-1}(B) = \emptyset$. Then $C_n(B)$ is a subcontinuum of $C_n(Y)$ ($\text{Int}_{C_n(Y)}(C_n(B)) \neq \emptyset$) such that $C_n(B) \cap C_{n_{f(K)}}(Y) = \emptyset$. Thus, $\pi_{f(K)}^Y(C_n(B))$ is a subcontinuum of $C_{f(K)}^n(Y) - \{C_{n_{f(K)}}^Y\}$ ($\text{Int}_{C_{f(K)}^n(Y)}(\pi_{f(K)}^Y(C_n(B)))$).

a) If $C_K^n(f)$ is a monotone (or almost monotone) mapping, then the preimage $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(C_n(B)))$ is connected. Since π_K^X is a monotone mapping, then $(\pi_K^X)^{-1}(C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(C_n(B))))$ is connected. Thus,

$$(\pi_K^X)^{-1}(C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(C_n(B)))) = C_n(f)^{-1}(C_n(B)).$$

Notice that $C_n(f)^{-1}(C_n(B)) = \langle f^{-1}(B) \rangle_n$. Hence, $f^{-1}(B)$ is connected. Therefore, f is monotone (or almost monotone).

b) If $C_K^n(f)$ is a quasi-monotone (or weakly monotone) mapping, then the preimage $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(C_n(B)))$ has only finitely many components, $\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_m$, and $C_K^n(f)(\mathfrak{L}_i) = \pi_{f(K)}^Y(C_n(B))$ for each $i \in \{1, \dots, m\}$. Let L be a component of $f^{-1}(B)$. By (3) of Proposition 3.4, $\pi_K^X(\langle L \rangle_n)$ is a component of $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(C_n(B)))$. Thus, each component of $f^{-1}(B)$ determines one component of $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(C_n(B)))$. Therefore, $f^{-1}(B)$ has only finitely many components and by (3) of Proposition 3.3, $f(L) = B$. Hence, f is also quasi-monotone (or weakly monotone). \square

Theorem 5.2. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a mapping between continua and $n \in \mathbb{N}$. Then the following conditions are equivalent:*

- (1) f is monotone;
- (2) $C_n(f)$ is monotone;
- (3) $C_K^n(f)$ is monotone for each $K \in 2^X$.

Moreover, each one of the conditions (1), (2), (3) implies (4).

- (4) $C_K^n(f)$ is monotone for some $K \in 2^X$.

Proof. By [10, Theorem 4, p. 784], (1) and (2) are equivalent. By Proposition 3.2 and Theorem 5.1, (2) implies (3) and (3) implies (1), respectively. Clearly, (3) implies (4). \square

Theorem 5.3. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a mapping between continua and $n \in \mathbb{N}$. We consider \mathbb{M} as in Theorem 5.1 and the following conditions:*

- (1) $f \in \mathbb{M}$;
- (2) $C_n(f) \in \mathbb{M}$;
- (3) $C_K^n(f) \in \mathbb{M}$ for each $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f) \in \mathbb{M}$ for some $K \in 2^X$.

Then condition (2) implies (3) and each one of the conditions (2) and (3) implies (4) and (1).

Proof. It follows from Proposition 3.2 that (2) implies (3). By Theorem 5.1, (3) implies (1). Clearly, (2) implies (1) and (3) implies (4). \square

The Example 4.4 shows us that there are continua X, Y and a map $f : X \rightarrow Y$ such that f is not monotone, or almost monotone, or quasi-monotone or weakly confluent, and $C_K^n(f)$ is monotone for some $K \in 2^X$.

5.1. Strongly freely decomposable mappings.

Theorem 5.4. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a map between continua and let $n \in \mathbb{N}$. Then, $C_K^n(f)$ is almost monotone if and only if $C_K^n(f)$ is strongly freely decomposable.*

Proof. Since every almost monotone map is strongly freely decomposable, we have that the almost monotoneity of $C_K^n(f)$ implies his strong free decomposability. Since $C_K^n(X)$ is unicoherent by [2, Theorem 2.1], the converse implications follow from [7, Theorem 4.2, p. 894]. \square

The next result follows from Theorem 5.3 for almost monotone mappings and Theorem 5.4.

Corollary 5.5. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a map between continua and let $n \in \mathbb{N}$. If $C_K^n(f)$ is strongly freely decomposable, then f is an almost monotone map.*

6. CONFLUENT TYPE MAPPINGS

Given a continuum X , $n \in \mathbb{N}$, B a subcontinuum of X and $x_1, \dots, x_{n-1} \in X$, notice that $\mathcal{B} = \langle \{x_1\}, \dots, \{x_{n-1}\}, B \rangle_n \subset C_n(X)$ is homeomorphic to B . Hence, if B is an irreducible continuum, then \mathcal{B} is an irreducible continuum.

Theorem 6.1. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a mapping between continua and $n \in \mathbb{N}$. If \mathbb{C} is any of the following class of mappings: confluent, semi-confluent, weakly confluent, pseudo-confluent, joining. If $C_K^n(f) \in \mathbb{C}$ for each $K \in 2^X$, then $f \in \mathbb{C}$.*

Proof. Let B be a proper subcontinuum (irreducible for the case of pseudo-confluent) of Y and let D_1 and D_2 components of $f^{-1}(B)$. We consider $K \in 2^X$ such that $K \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ and let $y_1, \dots, y_{n-1} \in Y - (B \cup f(K))$ such that $y_i \neq y_j$ for $i \neq j$. Let M_i be a component of $f^{-1}(y_i)$ for each $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Then, by (3) of Proposition 3.4, for $i \in \{1, 2\}$ $\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, D_i \rangle_n)$ is a component of $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\mathcal{B}))$ where $\mathcal{B} = \langle \{x_1\}, \dots, \{x_{n-1}\}, B \rangle_n$. Notice that $\mathcal{B} \cap C_{n_{f(K)}}(Y) = \emptyset$ (this implies that $\pi_{f(K)}^Y(\mathcal{B})$ is a irreducible subcontinuum of $C_{n_{f(K)}}^n(Y)$ such that $C_{n_{f(K)}}^Y \notin \pi_{f(K)}^Y(\mathcal{B})$).

a) If $C_K^n(f)$ is confluent, then by (1) of Proposition 3.3 for each component D of $f^{-1}(B)$ we have $C_n(f)(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, D \rangle_n) = \mathcal{B}$. Hence, $f(D) = B$ and f is confluent.

b) If $C_K^n(f)$ is semi-confluent, without of lost generality we can suppose that

$$C_K^n(f)(\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, D_1 \rangle_n)) \subset C_K^n(f)(\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, D_2 \rangle_n)).$$

Then $C_n(f)(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, D_1 \rangle_n) \subset C_n(f)(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, D_2 \rangle_n)$. Therefore $f(D_1) \subset f(D_2)$ and f is semi-confluent.

c) If $C_K^n(f)$ is weakly confluent, then by (2) of Proposition 3.3, there exists a continuum \mathfrak{M} of $C_n(f)^{-1}(\mathcal{B})$ such that $C_n(f)(\mathfrak{M}) = \mathcal{B}$. Since $\mathfrak{M} \cap C_{n_K}(X) = \emptyset$, we can find a subset M_n of X , such that M is a component of $f^1(B)$ and $\langle M_1, \dots, M_n \rangle_n \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset$. By (2) of Proposition 3.4, $\langle M_1, \dots, M_n \rangle_n$ is component of $C_n(f)^{-1}(\mathcal{B})$. Thus, $\mathfrak{M} = \langle M_1, \dots, M_n \rangle_n$ and $f(M_n) = B$. Therefore f is weakly confluent.

d) If $C_K^n(f)$ is pseudo-confluent, then $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\mathcal{B}))$ has a component \mathcal{C} such that $C_K^n(f)(\mathcal{C}) = \pi_{f(K)}^Y(\mathcal{B})$. Since $C_{n_K}^X \notin \mathcal{C}$, $(\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{C})$ is a component of $(\pi_K^X)^{-1}(C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\mathcal{B}))) = C_n(f)^{-1}(\mathcal{B})$. Notice that $C_n(f)((\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{C})) = \mathcal{B}$. On the other hand, $\bigcup (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(y_1) \cup \dots \cup f^{-1}(y_{n-1}) \cup f^{-1}(B)$, with $(\bigcup (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{C})) \cap f^{-1}(y_i) \neq \emptyset$ and $(\bigcup (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{C})) \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$. Since $\bigcup (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{C})$ has at most n components, then C_1, \dots, C_n are exactly the components of $\bigcup (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{C})$. Without loss of generality, we assume that $C_i \subset f^{-1}(y_i)$ for $i = 1, \dots, n-1$ and $C_n \subset f^{-1}(B)$. Let C the component of $f^{-1}(B)$ such that $C_n \subset C$.

Claim. $f(C) = B$.

Let $b \in B$ and let $E = \{y_1, \dots, y_{n-1}\} \cup b$. Then $E \in \mathcal{B}$. Hence, there exists $A \in (\pi_K^X)^{-1}(C)$ such that $f(A) = E$. This implies that $b \in f(A) \subset f(\bigcup (\pi_K^X)^{-1}(\mathcal{C})) = f(C_1) \cup \dots \cup f(C_n)$. If there exists $j \in \{1, \dots, n-1\}$ such that $b \in f(C_j)$, then $b = y_j$, this is a contradiction. Hence, $b \in f(C_n)$. Thus, $b \in f(C)$. It follows that $B \subset f(C)$. Therefore, f is a pseudo-confluent.

e) If $C_K^n(f)$ is joining, then

$$C_K^n(f)(\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, D_1 \rangle_n)) \cap C_K^n(f)(\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, D_2 \rangle_n)) \neq \emptyset.$$

Thus, $C_n(f)(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, D_1 \rangle_n) \cap C_n(f)(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, D_2 \rangle_n) \neq \emptyset$. Hence, $f(D_1) \cap f(D_2) \neq \emptyset$ and f is joining. \square

Theorem 6.2. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a mapping between continua and $n \in \mathbb{N}$. Suppose that \mathbb{C} is any of the following class of mappings: confluent, semi-confluent, weakly confluent, pseudo-confluent, joining. We consider the following conditions:*

- (1) $f \in \mathbb{C}$;
- (2) $C_n(f) \in \mathbb{C}$;
- (3) $C_K^n(f) \in \mathbb{C}$ for each $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f) \in \mathbb{C}$ for some $K \in 2^X$.

Then condition (2) implies (3) and each one of the conditions (2) and (3) implies (4) and (1).

Proof. By Proposition 3.2, (2) implies (3). By Theorem 6.1, (3) implies (1). Clearly, (2) implies (1) and (3) implies (4). \square

The Example 4.4 shows us that there are continua X , Y and a map $f : X \rightarrow Y$ such that f is not pseudo-confluent, weakly confluent, semi-confluent, or confluent and $C_K^n(f)$ is confluent for some $K \in 2^X$.

7. OM, ATRIODIC AND LIGHT MAPPINGS

Let X be a continuum. Given a sequence $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ of subsets of X we define $\limsup_{m \rightarrow \infty} A_m$ as the set of points $x \in X$ such that there exists a sequence of positive integers $m_1 < m_2 < \dots$ and points $x_{m_s} \in A_{m_s}$ such that $\lim x_{m_s} = x$.

Lemma 7.1. [10, Lemma 12, p. 788] *A mapping $f : X \rightarrow Y$ between continua is an OM-mapping if and only if, for each point $y \in Y$ and each sequence of points $y_m \in Y$ converging to y the set $\limsup_{m \rightarrow \infty} f^{-1}(y_m)$ meets each component of $f^{-1}(y)$.*

Theorem 7.2. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a mapping between continua and $n \in \mathbb{N}$. We consider the following conditions:*

- (1) f is OM-mapping;
- (2) $C_n(f)$ is OM-mapping;
- (3) $C_K^n(f)$ is OM-mapping for each $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f)$ is OM-mapping for some $K \in 2^X$.

Then condition (2) implies (3) and each one of the conditions (2) and (3) implies (4) and (1).

Proof. By Proposition 3.2, (2) implies (3). Let $y \in Y$ and let $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ be a sequence of points in Y converging to y . We consider $K \in 2^X$ such that $f(K) \cap \{y, y_1, \dots\} = \emptyset$. Take $z_1, \dots, z_{n-1} \in Y - (f(K) \cup \{y, y_1, \dots\})$ such that $z_j \neq z_l$ for $j \neq l$. Let M_j be a component of $f^{-1}(z_j)$ for each $j \in \{1, \dots, n-1\}$ and let M_n be a component of $f^{-1}(y)$. By (3) of Proposition 3.4, $\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_n \rangle_n)$ is a component of $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\{z_1, \dots, z_{n-1}, y\}))$. Since the sequence

$$\{\pi_{f(K)}^Y(\{z_1, \dots, z_{n-1}, y_i\})\}_{i \in \mathbb{N}}$$

converges to $\pi_{f(K)}^Y(\{z_1, \dots, z_{n-1}, y\})$. By Lemma 7.1

$$\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_n \rangle) \cap \limsup_{t \rightarrow \infty} C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\{z_1, \dots, z_{n-1}, y_t\})) \neq \emptyset.$$

Let $A \in \langle M_1, \dots, M_n \rangle$ such that

$$\pi_K^X(A) \in \limsup_{t \rightarrow \infty} C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\{z_1, \dots, z_{n-1}, y_t\})).$$

Then, there exists a subsequence $\{\pi_K^X(A_{t_r})\}_{r \in \mathbb{N}}$ such that for each positive integer r , $\pi_K^X(A_{t_r}) \in C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\{z_1, \dots, z_{n-1}, y_{t_r}\}))$ and $\lim_{r \rightarrow \infty} \pi_K^X(A_{t_r}) = \pi_K^X(A)$. Let $a \in A \cap M_n$. Since $\lim_{r \rightarrow \infty} A_{t_r} = A_n$, there exists a sequence $\{a_{t_r}\}_{r \in \mathbb{N}}$, with $a_{t_r} \in A_{t_r}$, such that converges to $a \in A$. Thus, exists a positive integer m_0 such that $f(a_{t_r}) = y_{t_r}$ for each $r \geq m_0$. Hence $a \in A \cap M_n \cap \limsup_{t \rightarrow \infty} f^{-1}(y_t)$.

Therefore, by Lemma 7.1, f is an OM-mapping.

Clearly, (2) implies (1) and (3) implies (4). \square

The Example 4.4 shows us that there are continua X, Y and a map $f : X \rightarrow Y$ such that f is not OM and $C_K^n(f)$ is OM for some $K \in 2^X$.

Theorem 7.3. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a mapping between continua and $n \in \mathbb{N}$. We consider the following conditions:*

- (1) f is atriodic;
- (2) $C_n(f)$ is atriodic;
- (3) $C_K^n(f)$ is atriodic for each $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f)$ is atriodic for some $K \in 2^X$.

Then condition (2) implies (3) and each one of the conditions (2) and (3) implies (4) and (1).

Proof. By Proposition 3.2, (2) implies (3). Let B be a proper subcontinuum of Y and let $K \in 2^X$ such that $K \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. We consider $y_1, \dots, y_{n-1} \in Y - (B \cup f(K))$ with $y_i \neq y_j$ for $i \neq j$. Since $C_K^n(f)$ is atriodic map, there exist two components \mathfrak{D}_1 and \mathfrak{D}_2 of $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\mathcal{B}))$, where $\mathcal{B} = \langle \{y_1\}, \dots, \{y_{n-1}\}, B \rangle_n$, such that

a) $C_K^n(f)(\mathfrak{D}_1) \cup C_K^n(f)(\mathfrak{D}_2) = \pi_{f(K)}^Y(\mathcal{B})$,

b) for each component \mathfrak{C} of $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\mathcal{B}))$, we have either $C_K^n(f)(\mathfrak{C}) = \pi_{f(K)}^Y(\mathcal{B})$ or $C_K^n(f)(\mathfrak{C}) \subset C_K^n(f)(\mathfrak{D}_1)$ or $C_K^n(f)(\mathfrak{C}) \subset C_K^n(f)(\mathfrak{D}_2)$.

For each $j = 1, 2$, we have $(\pi_K^X)^{-1}(\mathfrak{D}_j) \cap C_{nK}(X) = \emptyset$. Then, we can find subsets M_1^j, \dots, M_n^j of X such that M_i^j is a component of $f^{-1}(y_i)$ for each $i = 1, \dots, n-1$ and M_n^j is a component of $f^{-1}(B)$. We may assume that $\mathfrak{D}_j \cap \pi_K^X(\langle M_1^j, \dots, M_n^j \rangle_n) \neq \emptyset$. Since \mathfrak{D}_j is a component of $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\mathcal{B}))$, by (3) of Proposition 3.4, $\mathfrak{D}_j = \pi_K^X(\langle M_1^j, \dots, M_n^j \rangle_n)$. Thus, by a) $f(M_n^1) \cup f(M_n^2) = B$. Now, let C be a component of $f^{-1}(B)$. Since $\pi_K^X(\langle M_1^1, \dots, M_{n-1}^1, C \rangle_n)$ is a component of $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\mathcal{B}))$, by b), $f(C) = B$ or $f(C) \subset f(M_n^1)$ or $f(C) \subset f(M_n^2)$.

We notice that (2) implies (1) and (3) implies (4). \square

Theorem 7.4. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a mapping between continua and $n \in \mathbb{N}$. We consider the following conditions:*

- (1) f is light;
- (2) $C_n(f)$ is light;
- (3) $C_K^n(f)$ is light for each $K \in 2^X$;
- (4) $C_K^n(f)$ is light for some $K \in 2^X$.

Then each one of the conditions (2) and (3) implies (1) and (3) implies (4).

Proof. It follows from [11, Theorem 3.10, p. 185] that (2) implies (1). Now, suppose that $C_K^n(f)$ is a light mapping. To prove that f is a light mapping,

we may assume that exists $y \in Y$ such that $f^{-1}(y)$ is not totally disconnected. Let M be a nondegenerate component of $f^{-1}(y)$. Let $K \in 2^X$ such that $K \cap f^{-1}(y) = \emptyset$ and let $y_1, \dots, y_{n-1} \in Y - (f(K) \cup \{y\})$ such that $y_i \neq y_j$ for $i \neq j$. Let M_i be a component of $f^{-1}(y_i)$ for each $i = 1, \dots, n-1$. By (3) of Proposition 3.4, $\pi_K^X(\langle M_1, \dots, M_{n-1}, M \rangle_n)$ is a subcontinuum nondegenerate of $C_K^n(f)^{-1}(\pi_{f(K)}^Y(\{y_1, \dots, y_{n-1}, y\}))$, this is a contradiction.

Clearly, (3) implies (4). \square

The next example shows us that there are continua X, Y and a map $f : X \rightarrow Y$ such that f is light and $C_K^n(f)$ is not light for some $K \in 2^X$.

Example 7.5. *Let $J = [-1, 1]$ and $f : J \rightarrow I$ defined by $f(t) = |t|$. Then, f is light. If $K = \{1\}$, then $C_K^n(f)$ is not light for every $n \geq 1$.*

Proof. Notice that f is light. Suppose that $K = \{1\}$, since $f^{-1}(f(K)) = \{-1, 1\}$, by Lemma 3.7, $C_K^n(f)^{-1}(C_{n_{f(K)}}^I)$ is nondegenerate. By Proposition 3.8, $C_K^n(f)^{-1}(C_{n_{f(K)}}^I)$ is a connected subset of $C_K^n(J)$. Therefore, $C_K^n(f)$ is not light. \square

REFERENCES

- [1] Anaya, J. G., Capulín, F., Lara, M. A. and Orozco-Zitli, F., Induced mappings between quotient spaces of n -fold hyperspaces of continua, Glasnik. Mat. 51 (2016), 475-490.
- [2] Anaya, J. G., Castañeda-Alvarado, E. and Martínez-Cortez, J. A., On the hyperspace $C_n(X)/C_{n_K}(X)$, preprint.
- [3] Barragán, F., Induced maps on n -fold symmetric product suspensions, Topology Appl. 158 (2011), 1192-1205.
- [4] Barragán, F., Macías, S. and Tenorio, J. F., More on induced maps on n -fold symmetric product suspensions, Glas. Mat. Ser. III 50(70) (2015), 489-512.
- [5] Camargo, J., Openness of the induced map $C_n(f)$, Bol. Mat. (N.S.) 16 (2009), 115-123.
- [6] Camargo, J., Some relationships between induced mappings, Topology Appl. 157 (2010), 2038-2047.
- [7] Camargo, J. and Macías, S., On freely decomposable maps, Topology Appl. 159 (2012), 891-899.
- [8] Camargo, J. and Macías, S., On strongly freely decomposable and induced maps, Glas. Mat. Ser. III 48 (2013), 429-442.
- [9] Castañeda-Alvarado, E., Orozco-Zitli, F. and Sánchez-Martínez, J., Induced mappings between quotient spaces of symmetric products of continua, Topology Appl. 163 (2014), 66-76.
- [10] Charatonik, J. J., Illanes, A. and Macías, S., Induced mappings on the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X , Houston J. Math. 28 (2002), 781-805.
- [11] Charatonik, J. J. and Charatonik, W. J., Lightness of induced mappings, Tsukuba J. Math. 22 (1998), 179-192.
- [12] Dugundji, J., Topology, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.
- [13] Hosokawa, H., Induced mappings between hyperspaces, Bull. Tokyo Gakugei Univ. (4)41 (1989), 1-6.

- [14] Hosokawa, H., Mappings of hyperspaces induced by refinable mappings, Bull. Tokyo Gakugei Univ. (4)42 (1990), 1-8.
- [15] Hosokawa, H., Induced mappings between hyperspaces II, Bull. Tokyo Gakugei Univ. (4)44 (1992), 1-7.
- [16] Hosokawa, H., Induced mappings on hyperspaces, Tsukuba J. Math. 21 (1997), 239-259.
- [17] Hosokawa, H., Induced mappings on hyperspaces II, Tsukuba J. Math. 21 (1997), 773-783.
- [18] Illanes, A. and Nadler, Jr. S. B., Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1999.
- [19] Maćkowiak, T., Continuous mappings on continua, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 158 (1979), 95 pp.
- [20] Nadler, Jr. S. B., Hyperspaces of Sets, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1978.
- [21] Nadler, Jr. S. B., Continuum Theory, An Introduction, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO, INSTITUTO LITERARIO NO. 100, COL. CENTRO, TOLUCA, ESTADO DE MÉXICO C.P. 50000, MÉXICO
E-mail address: `jgao@uaemex.mx`

E-mail address: `eca@uaemex.mx`

E-mail address: `jamartinezc@uaemex.mx`



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Third International Congress of Mathematics and its Applications



This certifies that

José Antonio Martínez Cortez

has presented the poster **Sobre la estructura topológica del espacio $C_n C_K(X)$** at the **Third International Conference on Mathematics and its Applications** held on September 5-9, 2016.

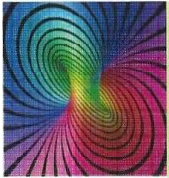
Dr. José Ramón Enrique Arrazola Ramírez
Head of the School of Physics and Mathematics



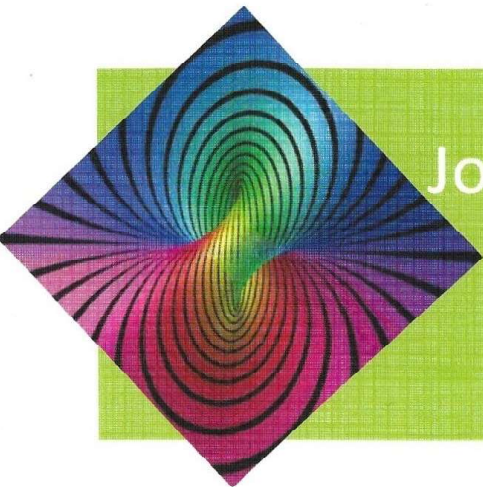
Dr. Fernando Macías Romero
Chairman of the 3CIMA

September 2016, Puebla, México





XI Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios.
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco,
Villahermosa, Tabasco del 4 al 7 de octubre de 2016.

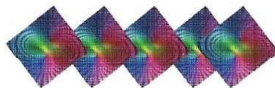


CONSTANCIA A

José Antonio Martínez Cortez

quien presentó la plática

Propiedades topológicas
del espacio $C_n C_K(X)$



Dr. Gerardo Delgadillo Piñón
Director de la División Académica de
Ciencias Básicas, UJAT



DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS

Dra. Isabel Puga Espinosa

Comité organizador

Facultad de Ciencias, UNAM; Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM;
Universidad Autónoma Juárez de Tabasco; B. Universidad Autónoma de Puebla.

La Sociedad Matemática Mexicana



otorga el presente

RECONOCIMIENTO

A: **JOSÉ ANTONIO MARTÍNEZ CORTEZ**

Por la presentación de la ponencia:

SOBRE LA ESTRUCTURA TOPOLOGÍA DEL ESPACIO $C_n C_K(X)$

realizada dentro de las Actividades del XLIX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, llevado a cabo del 23 al 28 de Octubre de 2016 en Aguascalientes, México.

Octubre de 2016
Aguascalientes, México.

Dr. Gelasio Salazar Anaya
Presidente de la SMM

XLIX
CONGRESO NACIONAL
DE LA SOCIEDAD
MATEMÁTICA MEXICANA



XLIX - P - 665 - 2342



XII Taller estudiantil de teoría de los continuos y sus hiperespacios


Universidad Autónoma del Estado de México, 3 al 6 de octubre de 2017.

Constancia a

José Antonio Martínez Cortez

por su conferencia

Estructura topológica del espacio $C_n C_k(X)$


Dr. José Guadalupe Anaya Ortega

Director de la Facultad de Ciencias de la
Universidad Autónoma del Estado de México



FACULTAD DE CIENCIAS

Facultades de Ciencias: Universidad Autónoma del Estado de México, B. Universidad Autónoma de Puebla,
Universidad Nacional Autónoma de México, Posgrado en Ciencias Matemáticas UNAM, COMECyT



Bucaramanga, septiembre 28 de 2018



EL SUSCRITO PROFESOR TITULAR Y DIRECTOR DEL GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS UIS, DE LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

Certifica:

Que el M. en C. JOSÉ ANTONIO MARTINEZ CORTEZ del Posgrado en Ciencias de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de México ha realizado una estancia en la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, del 31 de agosto al 29 de septiembre del presente año, donde realizó las siguientes actividades:

1. Presentó en el *Seminario de los lunes de Topología* la conferencia titulada “Estructura topológica del espacio $C_n(X)/C_{nk}(X)$ ”, dirigida a estudiantes y profesores de la Escuela de Matemáticas.
2. Participó en reuniones diarias con el profesor Javier Camargo, donde se discutieron aspectos relacionados con las propiedades topológicas del espacio $C_n(X)/C_{nk}(X)$.

Finalmente, considero importante resaltar que la estancia del maestro Martínez ha sido muy positiva para el Grupo de Investigación en Matemáticas de la UIS, y esperamos rinda frutos en el desarrollo del proyecto de investigación “*Sobre la estructura topológica del espacio $C_n(X)/C_n(K,X)$* ” en el que actualmente participa como estudiante de doctorado en el Posgrado de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de México. Así mismo, esperamos continuar y determinar nuevas acciones de cooperación y creación de nuevos proyectos interinstitucionales que contribuyan en la producción científica y el avance en el desarrollo de las Matemáticas, en particular, en la línea de la teoría de continuos y sus hiperespacios.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Javier Enrique Camargo García', is positioned above the typed name.

Javier Enrique Camargo García
Profesor Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander

Ciudad Universitaria, Carrera 27 - Calle 9
Apartado Aéreo 678 PBX: (7) 6344000
Bucaramanga, Colombia. www.uis.edu.co





La Sociedad Matemática Mexicana

otorga el presente

RECONOCIMIENTO

A: **JOSE ANTONIO MARTINEZ CORTEZ**

Por la presentación de la ponencia:

Funciones inducidas entre hiperespacios cociente

realizada dentro de las Actividades del 51 Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, llevado a cabo del 21 al 26 de Octubre de 2018, en Villahermosa, Tabasco.

Octubre de 2018
Villahermosa, Tabasco.

Dra. María de la Luz Jimena de Teresa de Oteyza
Presidenta de la Junta Directiva

51 Congreso Nacional
de la Sociedad Matemática Mexicana
2018

LI - P - 1472 - 2342

